Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire.

Régine Douady

UNIVERSITE PARIS VII

THESE de DOCTORAT D'ETAT

SPECIALITE: **DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES**

PRESENTEE PAR: Régine DOUADY

SUJET de la THESE : Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques.
- une réalisation dans tout le cursus primaire.

soutenue le, 10/10/84 devant la commission d'examen

JURY: Président H. FREUDENTHAL
Rapporteur A. REVUZ
Examinateurs A. CHENCINER
G. GLAESER
J. MARTINET
L. RESNICK
G. VERGNAUD

A Clémence LATOUR

L'expérience que nous rapportons ici s'est déroulée à l'école primaire de la rue de Bagneux à Montrouge (banlieue proche de Paris) d'octobre 1975 à juin 1980. Clémence LATOUR, Pierre DUCOUSSET et Pierre GIRAUD, acteurs importants de cette expérience, en étaient à l'époque des piliers émérites.

Tous les élèves de Clémence LATOUR ont connu son exigence de rigueur, mais aussi sa profonde affection. Ils ne se doutent peut-être pas du profit qu'ils en ont tiré. Son enthousiasme naturel et le désir d'entreprendre de Pierre DUCOUSSET, joints à leur compétence d'enseignants ont rendu possible la mise sur pied d'une expérience de plusieurs années. La contribution à la fois active et réfléchie de Pierre GIRAUD a assuré sa conduite jusqu'au terme du cursus primaire. Les élèves, quant à eux, ont manifesté tout au long des 5 années un formidable désir d'apprendre et de comprendre. Sans la remarquable collaboration de tous, ce travail n'aurait sans doute jamais pu voir le jour. Aux uns comme aux autres, je tiens à exprimer toute ma gratitude. Je tiens également à remercier tous les enseignants de Montrouge, Antony, Bagneux, Sceaux sans oublier mes collègues et en particulier Michèle ARTIGUE et Jacqueline ROBINET, qui chacun à un moment ou à un autre ont joué un rôle précieux.

Je remercie très sincèrement Monsieur LENOIR, I.D.E.N de la circonscription de Montrouge et Madame BUSSON, directrice de l'école, qui par leur excellent accueil tout au long de l'expérience et encore bien au delà, ont toujours facilité le déroulement du travail.

Pourtant, sans la stabilité et la continuité nécessaires à sa réalisation, ce projet n'aurait été qu'un rêve. Sa réalisation est aussi due au fait qu'elle s'est déroulée dans le cadre institutionnel de l'IREM. Je rends hommage à leurs directeurs successifs, dont l'actuel est François COLMEZ, d'avoir compris l'importance du rôle des IREM dans le développement de la didactique des mathématiques et d'avoir contribué à son essor.

Ma reconnaissance va également au professeur H.FREUDENTHAL et à André REVUZ qui, depuis la première heure, ont témoigné leur intérêt et n'ont pas ménagé leurs encouragements.

Je veux tout autant remercier Gérard VERGNAUD, comme je remercie Guy BROUSSEAU, des entretiens didactiques si intéressants que nous avons eus ensemble et qui ont été pour moi si instructifs tout en étant d'un apport très différent.

Je voudrais aussi exprimer toute ma reconnaissance à Aline ROBERT qui a passé un temps considérable à m'écouter exposer des idées parfois mal formulées, me permettant ainsi de les préciser. Sans sa précieuse collaboration, je n'aurais probablement jamais mené ce travail jusqu'au terme de sa rédaction.

Marie-Jeanne PERRIN a participé activement à la constitution des informations recueillies. Notre collaboration est effective depuis plusieurs années ; la rédaction de brochures et la réalisation de travaux achevés ou en cours en sont le fruit. Je tiens à exprimer ici tout le prix que j'attache à cette collaboration et à l'en remercier.

Je remercie tous ceux et celles qui ont participé à la frappe et au tirage et qui m'ont toujours accueillie avec une gentillesse à toute épreuve : J. BROHAN, O. DIERAERT, M. LAMY, N. LOCUFIER, J. et M. TORRESANI.

Enfin, je ne peux terminer sans une mention toute particulière pour Adrien, pour Raphaël, Diane et César, et aussi Charlotte et surtout Olivia, qui, chacun à leur manière courent en filigrane, voire explicitement, dans cette entreprise.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Le but de ce travail est de contribuer à l'étude des rapports entre l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en situation scolaire. Nous cherchons, en relation avec le point précédent, à améliorer les méthodes et les contenus de l'enseignement de cette discipline à l'école primaire.

Dès 1975, notre projet était en germe [DOU. 1]. Nous avons formulé depuis, un certain nombre d'hypothèses cognitives relevant spécifiquement des situations d'apprentissage en classe et expliquant les réussites constatées.

Plus précisément, compte tenu des hypothèses piagétiennes sur la formation des connaissances en termes de déséquilibre-rééquilibration [Pia] et de la théorie des situations [Br. 1], nous proposons les hypothèses suivantes :

1) Sur le plan strictement cognitif, la mise en oeuvre de déséquilibres et la possibilité de rééquilibration par les élèves peuvent se faire, pour une grande partie des concepts, au sein de jeux de cadres appropriés, grâce à des problèmes à construire à cet effet.

Les rééquilibrations que nous visons correspondent à l'acquisition de concepts nouveaux impliqués dans des "dialectiques outil-objet".

2) Sur le plan didactique, nous faisons l'hypothèse qu'il y a des problèmes adéquats permettant la réalisation des hypothèses ci-dessus et s'inscrivant dans une organisation globale de l'enseignement efficace pour la majorité des élèves.

L'exposition de nos hypothèses fait l'objet du chapitre I (principes).

Pour tester nos hypothèses, nous exhibons un projet d'enseignement des mathématiques sur les 5 années du cursus primaire(1) (chap. II). Ce projet est organisé du point de vue mathématique autour de la mesure des grandeurs : longueurs et aires (de rectangles) et inclut l'apprentissage des nombres décimaux. H. Lebesgue déclarait au début du siècle à propos de la mesure des grandeurs :

(1) Les élèves entrent à l'école primaire vers 6 ans. Les années du cursus sont les suivantes : cours préparatoire (CP), cours élémentaire 1ère année (CE_1) et 2e année (CE_2), cours moyen 1ère année (CM_1) et 2ème année (CM_2). Les élèves entrent ensuite, en général, en 6e (1ère année de collège).

"Il n'y a pas de sujet plus fondamental : la mesure des grandeurs est le point de départ de toutes les applications mathématiques ... d'autre part cette mesure fournit le nombre, c'est à dire l'objet même de l'Analyse" [Leb]. En particulier, géométrie et analyse sont en étroite relation.

Pour mettre en oeuvre dans notre projet ces rôles imbriqués de la mesure et du nombre nous avons été amenés à introduire, en interaction avec la géométrie et le nombre, le cadre fonctionnel et le cadre de la représentation sous deux aspects : algébrique et graphique. Nous vérifions, autant que nous le pouvons, que dans ce projet nos hypothèses sont bien à l'oeuvre (chap. II et chap. III jeu de cible). Enfin le chapitre IV est consacré à l'évaluation des élèves ayant suivi une réalisation (de ce projet) qui s'est révélée très efficace.

Nous avons bénéficié toutefois de conditions propices de réalisation. En effet, il était d'usage dans l'école qu'un enseignant de Cours Moyen suive ses élèves en CM_1 et CM_2. Il arrivait qu'un enseignant suive ses élèves en CP-CE_1. Pour notre expérience, C. Latour a suivi ses élèves en CP-CE_1-CE_2, P. Giraud prenant la suite en CM_1-CM_2. Signalons que le projet réalisé est né d'une première expérience sur 4 ans réalisée auprès d'une autre promotion d'enfants animée par C. Latour en CE_1-CE_2 et P. Ducousset en CM_1-CM_2. Pendant les nombreuses années qu'ont duré les expériences, le travail en commun, auquel a participé pour une grande partie Marie-Jeanne Perrin, a été marqué par la cordialité et la confiance réciproque, et aussi par l'exigence de rigueur, sans oublier la qualité de l'animation en classe par les maîtres qui en ont toujours gardé la responsabilité. Tout cela a produit un travail fécond tant du point de vue de la préparation des leçons, que de l'analyse a posteriori qui pouvait aboutir à des modifications des prévisions.

Le projet d'enseignement était envisagé pour s'étaler sur 4 ou 5 ans. En fait, vu les conditions exceptionnelles de travail, la plupart des objectifs - en particulier, l'apprentissage des nombres décimaux - ont été atteints en CE_2. Cette durée inattendue nous a permis, grâce à la coopération active de P. Giraud de tester la permanence éventuelle des acquis et l'évolution des conceptions sur 2 ans (CM_1-CM_2). Malgré les départs d'élèves et l'arrivée de nouveaux, c'est finalement avec un groupe de 20 élèves que nous avons pu travailler au moins 4 années consécutives : 17 du CP au CM_2 auquel s'adjoignent Louison et Grégoire du CP au CM_1, Elsa du CE_1 au CM_2. Nous avons considéré tous les élèves du CP pour l'évaluation après la situation "jeux de cible" en fin de CP début CE_1, mais nous n'avons pas retenu pour notre étude diachronique les élèves que nous n'avons pas observés au moins 4 ans.

Nous pouvons témoigner que tous les acteurs de l'expérience, en particulier élèves et enseignants ont manifesté une grande curiosité intellectuelle et un enthousiasme qui n'a jamais faibli. Cela n'a pas empêché les maîtres concernés de recevoir notre proposition diversement et d'avoir contribué à notre projet avec des différences traduisant leur opinion propre sur le rôle du maître et sur les relations maître-élève-savoir. C. Latour, toujours décidée à aller de l'avant s'est engagée dans les voies les plus audacieuses (la symbolisation algébrique au CP, l'étude des négatifs au CE_1 ou des relations temps-distance au CP puis au CE_1) en faisant le pari, la plupart du temps gagné sinon immédiatement du moins à plus long terme (cf la résurgence des négatifs au CE_2) que les risques étaient contrôlables. P. Ducousset a contribué efficacement au débroussaillage des situations en animant la 1ère promotion en CM_1-CM_2. Il a aussi apporté plus tard, dans une autre école (où les rapports maître-élèves et la relation au savoir se présentaient différemment : en effet, 11 élèves sur 24 ne savaient pas lire en CM_2) des solutions didactiques aux problèmes posés à la classe. En effet, en binôme avec une collègue, grâce à la fois à un partage des tâches - 2 enseignants pour 2 classes - et une excellente coordination, il a pu en 3 mois constituer un groupe-classe. Les élèves, dans leur majorité, ont pu acquérir les connaissances de base* nécessaires au développement des situations d'enseignement prévues pour l'apprentissage des nombres décimaux.

Enfin, nous avons recueilli avec Marie-jeanne Perrin une énorme information, même s'il manque par moment des éléments d'appréciation et d'évaluation. Toutefois, il ne nous a pas été possible de tout vérifier ni tout exploiter dans le cadre donné. Même au niveau théorique, nous n'avons pas transformé toutes nos remarques et réflexions recueillies sur le terrain dès 1975 en hypothèses (cf. la nécessité d'un facteur de ralentissement pour l'élève ou le besoin de survérification éprouvé par l'élève, signalés dans [DOU. 1].

Nous pensons tout de même avoir pointé un élément tout à fait important de la construction des connaissances en mathématiques, à savoir les jeux de cadres. A titre d'illustration, nous joignons justement en appendice deux exemples, parmi d'autres, significatifs de jeux de cadres, par ailleurs très efficaces, dans la recherche actuelle.

* en particulier les apprentissages de la symbolisation et de la lecture ont avancé en interaction.

CHAPITRE I

Principes

INTRODUCTION

Notre projet est le suivant :

"Elaborer et tester des hypothèses sur la façon dont peuvent s'acquérir en situation de classe dans tout le cursus primaire les connaissances en mathématiques."

Toutefois, ces hypothèses que nous allons poser ne prennent leur sens que dans leur réalisation effective à travers des projets précis d'enseignement. De ce fait, nous ne pourrons pas les tester directement, mais indirectement à travers un enseignement effectif.

Précisons notre projet :

"Construire et réaliser un enseignement dont nous considérons qu'il met en oeuvre de façon caractéristique les hypothèses élaborées et tester, à travers le déroulement effectif du processus , son impact sur la masse des élèves. L'efficacité de l'apprentissage ainsi provoqué (1), repérée par rapport aux attentes standard certes, mais surtout par rapport à nos prévisions, est pour nous l'indice d'un fait didactique. Nous pensons avoir dégagé des paramètres pertinents de la formation scolaire des connaissances sur lesquels nous avons eu une action (2). Leur mise en évidence constitue pour nous une validation de l'ensemble de notre démarche."

(1) en un sens que nous préciserons, et qui ne se réduit pas aux performances.

(2) (cf. variables de commande de G. Brousseau)

I - A PROPOS DE FORMATION DES CONNAISSANCES.

Précisons le cadre de notre travail.

Nous adoptons comme hypothèse sur l'acquisition des connaissances l'idée centrale de Piaget sur la formation des connaissances, idée qu'il émet d'ailleurs indépendamment de l'enseignement et du contexte social, selon laquelle "elles ne procèdent ni de la seule expérience des objets, ni d'une programmation innée préformée sur le sujet, mais de constructions successives avec élaborations constantes de structures nouvelles". Pour Piaget, "l'équilibration est le facteur fondamental du développement cognitif". En effet, dit-il,"durant les périodes initiales, il existe une raison systématique de déséquilibre, qui est l'asymétrie des affirmations et des négations. Il en résulte que l'équilibration progressive est un processus indispensable du développement,... dont les manifestations se modifient... dans le sens d'un meilleur équilibre en sa structure qualitative comme en son champ d'application".

En d'autres termes, le processus général de formation des connaissances serait le suivant : "Il débuterait en chaque cas par l'exercice d'un schème initial d'assimilation dont l'activation se trouverait tôt ou tard entravée par des perturbations : les compensations qui en résulteraient se traduiraient alors par une nouvelle construction dont les régulations caractérisant ses phases seraient donc à la fois compensatrices, eu égard à la perturbation (en impliquant ainsi la formation au moins virtuelle de négations) et formatrices par rapport à la construction, et cela jusqu'à la constitution d'une nouvelle structure équilibrée et au déroulement ultérieur de processus analogues".

Au niveau de l'apprentissage, dans la mesure où certaines erreurs apparaissent comme un facteur de déséquilibre (contradiction par exemple), on comprend qu'elles puissent jouer un rôle productif. Ceci se produit surtout dans une situation collective où on a besoin de validation. En effet, pour expliquer et rejeter les erreurs, on est amené à construire des arguments pour convaincre (rééquilibration). Ainsi, pour nous, l'enseignement doit prendre le relais des premiers déséquilibres naturels de l'enfant. Il a la charge d'organiser aussi efficacement que possible un jeu de déséquilibres-rééquilibrations au niveau des conceptions des élèves. Ce jeu peut évoluer selon les moments, de façon individuelle ou collective.

Ajoutons à ce sujet que parmi les successeurs de Piaget, les tenants de l'Ecole Genevoise de psychologie sociale ont montré que l'appropriation collective des connaissances peut précéder l'appropriation individuelle. Ils ont tenté d'expliquer le phénomène dans le cadre de la théorie constructiviste de Piaget. Ils expliquent par exemple l'efficacité du conflit socio-cognitif par l'intégration de centrations opposées dans un nouveau schème.

Nous utiliserons aussi ces idées, en prévoyant en particulier des phases collectives à certains moments bien choisis de notre enseignement. Cela étant, Piaget et ses successeurs se placent toujours hors du contexte d'enseignement. En particulier, ils ne donnent pas de conditions sur les situations d'apprentissage permettant de créer des déséquilibres et d'engager le jeu des régulations. Une lecture littérale de leurs conclusions a d'ailleurs donné lieu à une exploitation répandue, mais inefficace, des caractères positif et négatif des objets (tels que carré-non carré, rouge-non rouge)...

Ainsi tout l'apport de Piaget, si important qu'il soit, est insuffisant pour qu'on puisse construire directement un apprentissage en classe dont les résultats soient prévisibles, au moins avec une forte probabilité, et dont les conditions soient reproductibles. Piaget laisse entier le problème du rapport entre l'enseignement et l'apprentissage, rapport qui est un des objets d'étude de la didactique de la discipline enseignée et dans le cas des mathématiques celui de la didactique des mathématiques.

Face à ce problème et pour y répondre, au moins en partie, G. Brousseau a élaboré une théorie des situations didactiques. Pour G. Brousseau, en effet, les conceptions des élèves sont le résultat d'un échange permanent avec les situations de problèmes dans lesquelles ils sont placés et au cours desquelles les connaissances antérieures sont mobilisées pour être modifiées, complétées ou rejetées. Il donne une classification des situations de classe mais ne donne pas de conditions sur les problèmes susceptibles de servir efficacement de contenus à ces situations. Autrement dit, il n'étudie pas particulièrement les rapports entre les contenus et les situations.

Face au même problème de formation des connaissances, G. Vergnaud déclare à la suite de Piaget en une formule schématique : "l'action est source et critère du savoir". Ici action peut vouloir dire résolution de problèmes. Problème est à prendre au sens large de situation problématique à situer dans un champ conceptuel approprié. La considération d'un tel champ contribue à donner du sens au problème et aux divers concepts en jeu. Elle permet d'expliquer en partie les conduites de résolution. D'autre part, nous insistons, comme G. Vergnaud et d'autres avant nous, sur le rôle du temps dans la construction des connaissances. Il faut souvent plusieurs années pour construire un concept. Enfin un tout autre ordre d'explication abordé dans les travaux de Y. Chevallard prend en compte les conventions et habitudes dans la construction des connaissances.

Pour notre part, nous sommes amenés, pour atteindre notre objectif, à proposer des réalisations d'apprentissage en classe. Nous le ferons, d'une part en nous appuyant sur la théorie des situations [Br. 1], d'autre part en formulant sur l'apprentissage des hypothèses complémentaires à celles de Piaget, Vergnaud et al.

Nous allons en revanche préciser et systématiser un jeu de régulations dont l'objectif est l'apprentissage des mathématiques du CP au CM2. Comme il s'agit de situations de classe, nous allons privilégier ce qui peut avoir une réalisation effectivement collective.

2 - A PROPOS D'ENSEIGNEMENT.

Les caractéristiques à considérer pour cerner l'enseignement en tant qu'objet d'étude sont de plusieurs ordres, cependant imbriquées. Nous en repérons trois. Certaines sont impliquées dans toute forme d'enseignement. Ce

sont par exemple celles relatives à l'attitude à priori des enfants vis à vis de l'école, à l'existence d'un seuil minimum de discipline, d'attention, à la disponibilité d'une masse de connaissances et d'habitudes au moment d'aborder une question nouvelle, à une certaine gestion du temps scolaire. Cependant la détermination de ces facteurs et la réalisation plus ou moins satisfaisante des conditions posées dépendent, entre autres, de la forme d'enseignement. Un autre ordre de caractéristiques a trait à l'aspect social de l'apprentissage, aux relations maître-élèves, élèves-élèves. D'autres enfin qui nous serviront à formuler nos hypothèses prennent leur sens au sein de l'enseignement que nous décrivons. Précisons au préalable le contexte dans lequel nous travaillons.
Nous prenons acte du fait suivant : l'enfant arrive à l'école avec une certaine connaissance, avec des moyens, des habitudes grâce auxquels il va traiter l'information qu'il recevra et prendre des décisions quand il aura à faire des choix. Il dispose de systèmes de représentations et de schèmes d'action. Tout ce bagage, qui est certes très différent d'un individu à l'autre, dont l'enseignant peut tenter de faire abstraction s'il le veut, existe cependant et constitue une partie de la personnalité de l'enfant. Les apports extérieurs à l'école (télévision, camarades, famille...) continuent d'ailleurs à se produire tout au long de la scolarité. D'autre part, l'objectif du maître est un objectif d'apprentissage. Il a la charge d'amener l'ensemble des élèves de sa classe à disposer de façon efficace de certaines connaissances et savoir-faire. De ce point de vue il est responsable devant l'Institution, les élèves, les parents d'élèves. L'objet de l'enseignement est déterminé par l'Institution, non par le maître. Celui-ci a seulement la responsabilité des moyens à mettre en oeuvre pour atteindre son objectif. Certains de ces moyens sont contrôlés par les conseils et instructions qu'il reçoit par la voie hiérarchique. D'autres sont à négocier en classe avec les élèves. C'est dans ce contexte que l'élève de l'école primaire doit construire des concepts mathématiques.

3 - A PROPOS DE MATHEMATIQUES.

a) Pour un concept mathématique, il convient de distinguer son caractère "outil" et son caractère "objet". Par outil nous entendons son fonctionnement scientifique dans les divers problèmes qu'il permet de résoudre. Un concept prend son sens par son caractère outil. Toutefois, ce caractère met en jeu les relations qu'il entretient avec les autres concepts impliqués dans le même problème. Autrement dit, du point de vue outil, on ne peut pas parler d'un concept mais d'un réseau de concepts gravitant éventuellement autour d'un concept principal (cf. champ conceptuel G. Vergnaud 1). Aussi l'apprentissage devra-t-il prendre en compte un tel ensemble.

Nous dirons qu'un outil est un outil adapté s'il intervient dans un problème justifiant l'usage du concept dont il procède, par efficacité ou nécessité. Un outil peut être adapté à plusieurs types de problèmes. Réciproquement , plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème. Néanmoins, chacun a un certain domaine de validité.

Ces outils peuvent appartenir à différents cadres : physique, géométrique, numérique, graphique ou autres, chaque cadre ayant ses objets, ses relations et leurs formulations.

Par objet, nous entendons le concept mathématique, considéré comme objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement.

L'activité principale en mathématiques, dans le cadre scolaire ou chez les chercheurs professionnels [cf. appendice] consiste à résoudre des problèmes, à poser des questions. Pour sa part, le chercheur peut déclarer un problème résolu s'il peut justifier ses déclarations selon un système de validation propre aux mathématiques. Dans cette démarche, il crée des concepts qui jouent le rôle d'outil pour résoudre des problèmes. Lors du passage à la communauté scientifique, le concept est décontextualisé de façon à pouvoir resservir. Il devient alors un objet de savoir.

b) Rapports à l'élève.

Pour l'élève, le caractère outil peut être implicite ou explicite. Décrivons plus précisément la situation. Un élève est confronté à un problème

qu'il doit résoudre. Cela fait partie de son contrat avec le maître. Ses conceptions propres lui permettent d'engager une procédure grâce à des notions et techniques qu'il sait utiliser, à propos desquelles il peut faire des déclarations mais dont il ne connait pas nécessairement les conditions d'emploi et les limites.

Admettons qu'il résolve ainsi au moins partiellement son problème.

L'observateur extérieur peut reconnaître que les hypothèses mathématiques justifiant les décisions de l'élève sont en fait satisfaites, sans que l'élève soit en mesure de les formuler. Ces notions que l'observateur extérieur reconnait, nous dirons que l'élève les fait fonctionner implicitement, ou qu'il met en oeuvre des outils conceptuels implicites ou plus simplement des outils implicites.

Au contraire, si l'élève peut les formuler et en justifier l'emploi, nous dirons qu'il met en oeuvre des outils explicites. D'autre part, le domaine de validité des outils dont dispose l'élève évolue au cours de la scolarité.

Enfin, nous appelerons "pratique" tout usage adapté , par les élèves, d'outils explicites ou implicites mais formulés, que ces outils aient fait l'objet d'une institutionnalisation ou non.

4 - A PROPOS DES RAPPORTS ENTRE MATHEMATIQUES, ENSEIGNEMENT et APPRENTISSAGE.

Rappelons que, pour nous, avoir des connaissances en mathématiques c'est être capable d'en provoquer le fonctionnement comme outils explicites adaptés dans des problèmes qui leur donnent leur sens - avec ou sans marque d'appel dans la formulation du problème. Ces connaissances interviennent, soit pour résoudre des problèmes, soit pour poser des questions à leur propos. Ceci se produit en particulier si les conditions habituelles d'utilisation ne sont pas exactement satisfaites dans le problème posé. En ce cas, avoir des connaissances, c'est aussi pouvoir les adapter, les bricoler pour essayer de répondre tout de même au problème (cf. Chap.IV B 6 R41). Autrement dit, nous adoptons un point de vue dynamique vis à vis de la connaissance en mathématique. Dans ces conditions, un enseignement est efficace dans la mesure où il donne lieu chez l'élève à des acquisitions, au sens précédent, de connaissances mathématiques.

a) Objets de savoir - Objets d'enseignement.

Y. Chevallard a introduit le concept de transposition didactique [Ch. 1] pour rendre compte de la transformation nécessaire opérée sur les savoirs retenus pour être enseignés avant que ces savoirs puissent effectivement être enseignés. Les mathématiciens assurent la création mathématique selon une genèse qui dépend essentiellement (mais pas seulement) des problèmes à résoudre. L'école, elle, développe une genèse artificielle différente, compte tenu des contraintes auxquelles elle est soumise : par exemple, la contrainte de temps, la complexité du champ scientifique et des problèmes à l'origine de la notion décontextualisée choisie pour être enseignée et la recontextualisation artificielle à laquelle elle est conduite avant le dépouillement retrouvé. Les conventions sociales, les textes officiels -programmes, instructions, commentaires- les livres scolaires exercent une pression déterminante sur cette transformation. Or ces textes sont "largement marqués par une conception déductiviste de la démarche en mathématique" peu propice à une construction des connaissances efficace pour résoudre des problèmes [Bal. 1].

Pour nous, un objet d'enseignement doit être "fidèle" à l'objet de savoir auquel il correspond. Pour cela, il doit avoir les caractères suivants :

- le concept sous-jacent est un outil adapté aux problèmes retenus pour les élèves. (Autrement dit, les propriétés essentielles que les scientifiques utilisent sont retenues dans les problèmes de l'élève).

- la diversité des aspects qui entrent en jeu dans la signification du concept est convenablement représentée dans l'ensemble des problèmes retenus.

b) Objets réels - Objets d'enseignement -Représentations.

Le début de l'enseignement des mathématiques correspond à une modélisation du réel : l'espace ambiant et les objets réels déplaçables. L'enfant peut agir sur le monde réel et le modifier. Il peut ne pas être capable d'en avoir une vision instantanée globale. Un rôle des représentations est de rendre compte de cette globalité, en ne retenant qu'une partie bien choisie de l'information, de façon à en avoir une disponibilité permanente. Ce faisant, on attache aux signifiés primitifs (objets réels) des signifiants (représentations, relations...). Aux traces écrites de ces signifiants sont attachés de nouveaux signifiés d'un nouvel espace, celui des représentations. On n'aborde pas ici les raisons des choix des signifiés retenus dans l'enseignement.

c) Pédagogie courante

Cette pédagogie utilise essentiellement et dans l'ordre invariable la méthode "j'apprends, j'applique". On pourrait parler d'une mécanique "objet-outil" et/ou "signifiant-signifié". Il s'agit en effet d'une présentation de notions mathématiques que l'élève doit apprendre, suivie de problèmes ou exercices d'applications fabriqués pour que l'élève puisse utiliser ce qu'il a appris sans transformation. De plus, il doit le faire selon des règles du jeu qui ne sont pas toujours explicitées mais qui servent de référence pour évaluer son travail. Souvent le maître "montre", l'élève n'a qu'à "faire pareil". On sait que pour la majorité des élèves, cette pédagogie n'aboutit pas à une construction des connaissances. Remarquons qu'il n'y a pas de recherche de jeu des déséquilibres-rééquilibrations. De plus, les problèmes mettent rarement en oeuvre les caractères essentiels des notions (1), c'est à dire ceux qui en justifient scientifiquement l'emploi. En particulier, les élèves sont rarement engagés dans une dialectique de preuve correspondant à une question ouverte pour eux. Les partisans de la méthode "j'apprends, j'applique" espèrent, en allant du général au particulier, donner aux élèves des moyens à plusieurs usages et par là-même

---

(1) C'est vraisemblablement incompatible avec ce type d'enseignement. En effet, un enseignement n'est admissible pour le maître que s'il lui garantit un certain pourcentage de réussite dans sa classe. Cela le conduit dans la méthode "j'apprends j'applique" à ne pas mettre en oeuvre de grands problèmes ou à les découper en petites questions.

les conduire à un apprentissage efficace. Mais cette méthode risque le cas échéant d'occulter la correspondance signifié-signifiant évoquée en b). Enfin les concepts y sont en général présentés dans un certain cadre et les applications demandées n'en sortent pas.

Ceci rend difficiles d'une part les interactions des différents cadres d'intervention du concept, d'autre part l'articulation avec d'autres concepts.

d) Une autre organisation de l'enseignement des mathématiques.

Pour construire un enseignement différent, restituant leur sens aux outils que les élèves utilisent, tout en assurant une présentation institutionnelle aux objets correspondants, nous avons besoin de caractériser une autre organisation de l'enseignement.

Dans cette organisation, l'enseignant prend en compte officiellement la construction du savoir des élèves par les élèves eux-mêmes. Cette organisation est fondée du point de vue cognitif sur trois points : la dialectique outil/objet ; la dialectique ancien/nouveau ; le jeu des cadres. Du point de vue des échanges de l'élève avec le milieu au sein duquel il évolue, elle s'appuie sur les trois formes de dialectique (action, formulation, validation) [G. Br. 1] et aussi sur des interventions de l'enseignant à des moments bien choisis par lui. Enfin, du point de vue du contrat didactique, elle nécessite une institutionnalisation des connaissances et un moyen pour l'élève de contrôler lui-même son apprentissage. Nous décrivons ce fonctionnement ci-dessous en dégageant les deux leviers sur lesquels nous avons choisi d'agir : le sens(dialectique outil/objet) et le jeu des déséquilibres/rééquilibration (jeu de cadres) et en décrivant à cette occasion un certain rôle de l'enseignant.

5 - DIALECTIQUE OUTIL-OBJET.

Le fonctionnement de la dialectique outil-objet* est caractérisé par l'organisation schématique suivante : étant donné un certain problème initial ,

* notée par la suite D.O.O ou D O O.

Phase a) "ancien" :

La première étape consiste en la mise en oeuvre d'un objet connu comme outil explicite pour engager une procédure de résolution du problème, ou au moins d'une partie du problème. Autrement dit, on mobilise de "l'ancien" pour résoudre au moins partiellement le problème.

Phase b) Recherche :

Dans la deuxième étape, l'élève rencontre des difficultés pour résoudre complètement son problème : soit parce que sa stratégie devient très coûteuse (en nombre d'opérations, en risque d'erreurs, en incertitude du résultat...), soit parce qu'elle ne fonctionne plus. Il est conduit à chercher d'autres moyens mieux adaptés à sa situation. On reconnaît là le début d'une phase d'action. Il peut alors mettre en oeuvre implicitement des outils, nouveaux soit par l'extension du champ de validité, soit par leur nature même. Schématiquement nous parlerons dans cette étape, de "nouveau implicite".

Du point de vue des élèves, les conceptions à l'oeuvre (le cas échéant collectivement) à ce moment là, vont entrer en conflit ou en résonance avec les anciennes. Les erreurs ou contradictions peuvent devenir les enjeux de processus dialectiques de formulation et validation propres à résoudre les conflits et assurer les intégrations nécessaires. Mais il se peut aussi que des convictions contradictoires restent sans réponse tout en étant fécondes (cf. II la recherche d'un carré d'aire donnée)

Phase c) Explicitation :

Certains éléments ont joué dans l'étape précédente un rôle important, voire décisif et sont susceptibles d'être appropriés à ce moment-là de l'apprentissage. Ils sont alors formulés soit en termes d'objets, soit en termes de pratiques, avec leur condition d'emploi du moment. Il s'agit là de "nouveau explicite" susceptible de réemploi et familiarisation.

. Intervention du maître.

Il se peut qu'en cours de phase b ou c le maître se rende compte que la situation risque de se bloquer s'il n'intervient pas, ou qu'il s'en aperçoive trop tard et qu'il ait à la débloquer. Il lui revient, selon son analyse de la situation didactique, de prendre la décision d'intervenir ou non, et si besoin est, de choisir le moment et la forme de l'intervention tout en respectant la liberté de manoeuvre des élèves (cf. Incertitudes)

Phase d) Institutionnalisation

Le maître passe, dès lors, à une étape d'institutionnalisation de ce qui est nouveau et à retenir avec les conventions en cours, . le cas échéant des définitions, théorèmes et démonstrations. Ce nouveau à retenir est destiné à fonctionner ultérieurement en tant qu'ancien.

Phase e) Familiarisation - Réinvestissement

On donne ensuite aux élèves divers problèmes destinés à provoquer le fonctionnement comme outils explicites de ce qui a été institutionnalisé, à développer des habitudes et des pratiques, à intégrer le savoir social dans le savoir de l'élève. Ces problèmes simples ou complexes ne mettent en jeu que du connu.

Phase f = a) Complexification de la tâche ou nouveau problème

Il reste à utiliser les nouvelles connaissances au sein d'une situation complexe impliquant d'autres concepts soit connus, soit visés par l'apprentissage.

Le nouvel objet est susceptible de prendre place comme "ancien" pour un nouveau cycle de la dialectique outil-objet.

. Remarques

1) Cette description du fonctionnement de la dialectique outil-objet n'implique pas que chaque cycle aboutisse nécessairement à une extension du savoir de l'élève, socialement reconnu. Pour un même élève et pour un même objet, plusieurs cycles peuvent être nécessaires.

2) Il se peut que des habitudes et pratiques familières attendent de nombreuses années avant de donner lieu à des objets de savoirs (cf. II Variables - Fonctions).

Le processus que nous venons de décrire comprend plusieurs phases basées sur un problème à résoudre impliquant tous les élèves. Toutefois, même si la collectivité "classe" a résolu le problème, tous n'ont pas réagi, à titre individuel, de la même manière vis-à-vis du savoir engagé dans le problème, vis-à-vis des connaissances-outils mobilisées. Dans les situations de communication, le savoir diffuse diversement selon les élèves. Officialiser certaines connaissances qui, jusque-là, n'ont été que des outils, leur donner un statut d'objet mathématique est une condition d'homogénéisation de la classe, et, pour chacun, une façon de jalonner son savoir et par là même d'en assurer la progression. C'est la fonction principale des situations d'institutionnalisation. Une autre fonction est d'intégrer le savoir social, les habitudes et conventions dans le savoir de l'élève.

Par ailleurs, la structuration personnelle du savoir est de première importance en mathématiques pour qu'il y ait effectivement savoir. Cette structuration a été bien engagée dans le processus développé. Toutefois, pour la parfaire, l'élève a encore besoin de mettre à l'épreuve éventuellement dans des essais renouvelés, tout seul, les connaissances qu'il croit avoir acquises et faire le point sur ce qu'il sait. C'est la fonction des exercices.*

Dans cette structure qu'on peut appeler "activités - institutionnalisation - exercices", on a montré toute l'importance du premier terme. Sans les deux autres termes, son incidence sur l'appropriation des connaissances risquerait d'être faible pour l'élève.

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire que toutes les notions visées par l'apprentissage soient introduites dans une dialectique outil/objet. Certaines peuvent être apportées directement par l'enseignant ou par la lecture d'un manuel. Il reste à l'enseignant à définir pour l'organisation de la matière à enseigner une stratégie pour la répartition entre problèmes et apport direct et, pour une certaine organisation, définir une stratégie d'adaptation aux réactions de la classe.

6 - JEU DE CADRES

Le jeu de cadres traduit l'intention d'exploiter le fait que la plupart des concepts peuvent intervenir dans divers domaines, divers cadres physique, géo-

* quel qu'en soit le type, et l'on sait qu'il y en a toute une panoplie [GL 1].

métrique, numérique, graphique ou autres. Un concept se traduit dans chacun d'eux en termes d'objets et relations qu'on peut appeler les signifiés du concept dans le cadre. Les signifiants qui leur sont associés peuvent éventuellement symboliser d'autres concepts dans le cadre des signifiés. C'est le cas des représentations graphiques de fonctions et de représentations dans le plan, d'ensembles d'éléments matériels, algébriques, ou autres, dont on peut étudier les propriétés géométriques, topologiques ou combinatoires. Il en résulte des correspondances d'une part entre signifiés d'un même concept dans des cadres différents et d'autre part entre signifiés de concepts différents représentés dans le même cadre par les mêmes signifiants. Mais, pour les élèves en cours d'apprentissage, les concepts fonctionnent de manière partielle et différente selon les cadres. Par suite, les correspondances sont incomplètes.

De plus, cet état hétérogène des connaissances varie d'un élève à l'autre. Nous choisissons pour introduire et susciter le fonctionnement des connaissances, des problèmes où elles interviennent dans au moins deux cadres. Nous privilégions les cadres (en fait les problèmes) dans lesquels l'imperfection des correspondances est créatrice de déséquilibres qu'il s'agit de compenser. C'est le cas par exemple si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- Les signifiants d'un cadre représentent des signifiés de concepts différents, chacun ayant ses propriétés propres. L'étude autonome de l'un des systèmes de signifiés peut alors conduire à des résultats dont la traduction dans un autre système fournit des énoncés non prévisibles ou non évidents. C'est ainsi que l'inter-disciplinarité peut jouer de façon efficace.

- Les acquis des élèves sont différents dans chacun des cadres, pour chacun des signifiés. Les efforts déployés pour la recherche d'un équilibre pourront se traduire par un dépassement de l'objectif visé d'où un nouveau déséquilibre et ainsi de suite jusqu'à la construction d'un modèle stable pour toutes les opérations qu'on veut faire.

. Intervention de l'enseignant

La gestion par le maître, lors de bilans locaux et exercices prenant appui sur les productions des élèves au cours de leurs recherches, des différents changements de cadres réalisés par les élèves, les rappels et bilans globaux que

le maître organise et anime sont autant de moyens de diffusion des connaissances au sein de la classe. Ces moments se situent soit au cours de la phase b, pour prévoir ou dépasser un blocage éventuellement local, soit au cours des phases c ou e [cf. III Jeu de cible, chronique] [Ar. 1].

7 - CONDITIONS SUR LES PROBLEMES SUSCEPTIBLES D'ENCLENCHER UNE D.O.O.

Il reste à exprimer des conditions sur les problèmes pour que certains rapports de l'élève au problème soient assurés, que la dialectique outil/objet et le jeu des cadres soient possibles. Enonçons celles que nous avons retenues(1).

a) L'énoncé a du sens dans le champ de connaissances de l'élève.

b) L'élève doit pouvoir envisager ce que peut être une réponse au problème. Ceci est indépendant de sa capacité à concevoir une stratégie de réponse, ou d'une validation d'une proposition de réponse.

c) Compte tenu de ses connaissances, l'élève peut engager une procédure. Mais la réponse n'est pas évidente. Cela veut dire qu'il ne peut pas fournir de réponse complète sans développer une argumentation le conduisant à des questions auxquelles il ne sait pas répondre immédiatement.

d) Le problème est riche (2). Cela veut dire que le réseau des concepts impliqués est assez important, mais pas trop pour que l'élève puisse en gérer la complexité, sinon tout seul, du moins en équipe ou même au sein de la collectivité classe.

e) Le problème est ouvert(2) par la diversité des questions que l'élève peut poser ou par la diversité des stratégies qu'il peut mettre en oeuvre et par l'incertitude qui en résulte pour l'élève.

Les conditions c), d), e), éliminent un découpage du problème en de trop petites questions.

f) Le problème peut se formuler dans au moins deux cadres différents.

---

(1) Pour des catégories de problèmes [Gl. 1]

(2) Complexité et ouverture sont des notions relatives à l'élève. Un problème est riche et ouvert pour une classe s'il l'est pour assez d'élèves de la classe – 80 % par exemple.

chacun ayant son langage et sa syntaxe et dont les signifiés qui les constituent font partiellement partie du champ des connaissances de l'élève.

g) La connaissance visée par l'apprentissage est le moyen scientifique de répondre efficacement au problème. Autrement dit, elle est un outil adapté.

8 - NOS HYPOTHESES.

L'organisation que nous proposons, par son caractère interactif (outil-objet, changements de cadres...) oblige l'élève à traiter une information souvent abondante, émanant de plusieurs sources et s'exprimant diversement, avec des correspondances (volontairement) partielles entre les divers modes d'expression. La situation est par construction source de déséquilibre. La recherche d'amélioration des correspondances et l'argumentation développée à cet effet sont des moyens de rééquilibration.

Ceci nous conduit à poser les hypothèses suivantes :

a) On peut construire effectivement des connaissances en faisant jouer la dialectique outil-objet sur au moins deux cadres en respectant toutefois des seuils de deux types :

- Il existe une masse critique hétérogène de connaissances anciennes et d'habitudes, culturelles et techniques (les pré-requis) sous forme d'outils explicites dans un champ conceptuel donné permettant à l'élève de s'engager dans la résolution d'un problème relevant de ce champ, donc d'engager la dialectique outil-objet.

- Il existe un seuil critique d'interrogation en dessous duquel la réflexion ne s'enclenche pas (cf. Conditions 1), 2, 3) Rapports élève-problème).

b) La réalisation des conditions décrites en a) suppose une autre hypothèse : on peut pour un certain nombre d'objets mathématiques trouver des problèmes sollicitant deux ou trois cadres entre lesquels une dynamique est possible et susceptible de créer la dialectique outil-objet.

Ceci sera à rapprocher peut-être de l'efficacité de l'hypothèse a).

c) Il y a une masse critique de connaissances à acquérir par le processus décrit en a).

- grâce à quoi il est possible de leur intégrer d'autres connaissances acquises autrement, par exemple par la mécanique objet-outil, et qui fonctionneront efficacement.

- en dessous de laquelle le "j'apprends, j'applique" est inefficace pour la plupart des élèves.

d) Pour réaliser un enseignement prenant en compte les hypothèses ci-dessus, il reste à préciser l'articulation entre la dialectique outil-objet et sa gestion dans le cadre de la classe. Le maître en porte toute la responsabilité. D'où la nécessité de poser une autre hypothèse :

- On peut former des maîtres capables de mettre en oeuvre la dialectique outil-objet.

En fait, il y a d'autres difficultés du côté du maître et dans la relation ternaire maître-élève-savoir.

9 - POINT DE VUE DE L'ENSEIGNANT. INCERTITUDE DE L'ENSEIGNANT ET DE L'ELEVE.

Presque toutes les expériences s'appuyant sur les hypothèses formulées précédemment ont révélé de la part des enseignants à la fois un attrait et un malaise à mettre en oeuvre le type d'enseignement auquel elles conduisent. L'attrait s'explique par le fait que le maître est convaincu de l'importance de l'activité de l'élève dans l'acquisition de ses connaissances.

Par ailleurs, le maître a un contrat avec l'institution scolaire, avec les parents, avec les élèves. Ce contrat l'engage à assurer et même garantir la progression du savoir des élèves et par là-même lui impose des contraintes. Plus précisément, l'enseignant a la tâche d'amener les élèves de sa classe, dans leur ensemble (et pas seulement un petit nombre d'entre eux) d'un état supposé de connaissances, caractérisé par un réseau de concepts et relations (entre concepts) à un autre état de connaissances caractérisé par un autre réseau. Le travail cognitif de l'élève consiste alors à créer le nouveau réseau, avec l'aide du maître et aussi de ses acquis propres (lesquels ne sont pas seulement des productions de l'école), et éventuellement contre ses conceptions primitives. Or la progression du savoir à moyen et long terme est fixée par l'institution (cf. Programmes) et le maître doit en gros la respecter. Pour cela, il doit prévoir et organiser la progression à court terme entre deux jalons imposés. Il est tout à fait rassuré si sa progression effectivement réalisée à court terme respecte ses prévisions. C'est un moyen pour lui de garder le cap de l'objectif fixé et donc de respecter son contrat.

Mais peut-il garantir que les élèves, dans leur ensemble, l'auront suivi dans sa progression et auront atteint l'objectif visé ?

Pour que les élèves puissent réussir leur tâche d'apprentissage, l'ensei gnant doit leur communiquer l'envie d'apprendre et les convaincre qu'avec son aide, ils peuvent y arriver. Nous ne pouvons négliger que, pour le maître, la perception que les élèves ont de lui est un élément important dans ses choix didactiques. Il établit un équilibre entre les différentes contraintes (de toute nature) auxquelles il est soumis. Or nos hypothèses conduisent à un changement de cette perception. Il s'ensuit un déséquilibre et un malaise en attendant l'établissement d'un nouvel équilibre.

Admettons que l'enseignant prévoie dans sa progression une phase d'action. Pour que l'action soit réelle, il faut que l'élève ait à prendre des initiatives, faire des choix parmi des possibilités diverses, qu'il puisse poser des questions annexes et repérer des jalons intermédiaires pertinents pour son problème. Rappelons à ce propos que l'action est efficace si l'élève a un contrôle sur les effets produits : cela lui permet alors de modifier les conditions de production quand les effets ne sont pas ceux attendus. Pour que le jeu de l'action puisse se dérouler de façon satisfaisante, la situation doit laisser une marge de manoeuvre à l'élève, lui permettant en particulier d'exploiter le contingent et de faire jouer ses comportements cognitifs propres. Autrement dit, la situation doit comporter une part d'incertitude. De la sorte, elle prend en charge les différences possibles entre les élèves.

Admettons que l'enseignant tienne compte des comportements et des productions des élèves dans l'organisation et le contenu de ses séquences d'enseignement. Il s'en suivra inévitablement pour lui, quant à la trajectoire cognitive de chaque élève, une incertitude qui a des conséquences :

- C'est d'abord une incertitude sur les contenus qu'il va pouvoir institutionnaliser et sur le moment de leur institutionnalisation. En effet, il faut prévoir une autre gestion du temps scolaire, par exemple pour une question donnée, un allongement du temps de travail de l'élève à court terme. A long terme, on peut penser qu'il n'en est plus de même. Mieux, on peut parier sur une connaissance mieux construite, mieux structurée et par suite plus efficace, plus souple, et plus adaptable aux imprévus. A moyen terme (celui qui préoccupe le maître) la trajectoire réelle globale de la classe risque fort de s'écarter notablement de la trajectoire prévue. Or le maître ne peut accepter un trop gros écart incompatible avec ses contraintes.

- C'est aussi une incertitude sur l'évaluation des élèves, en somme sur le contrôle de leur apprentissage. C'est sa responsabilité d'enseignant qui est en jeu.

Pour toutes ces raisons, le malaise constaté ne nous étonne pas. Signalons tout de même que nous avons rencontré des enseignants tout à fait à l'aise dans le contrôle de ces situations d'apprentissage.

En résumé, pour que l'ensemble des élèves d'une classe atteigne un objectif cognitif fixé par le maître, celui-ci doit résoudre une contradiction :

- s'il fixe a priori une manière de l'atteindre, il n'a aucune garantie que les élèves le suivent.

- s'il suit les élèves, il risque de perdre le contrôle de l'objectif visé.

Cette contradiction du côté de l'enseignant est en dualité avec une contradiction du côté de l'élève. Celui-ci doit aborder l'inconnu avec les moyens connus dont il dispose. Il doit répondre à la demande du maître : apprendre ses leçons et résoudre ses problèmes. Mais il y a une incertitude pour lui : il n'est pas sûr de savoir faire même s'il a bien appris ses leçons.

La construction du savoir pour l'élève correspond à la résolution d'une contradiction : comment engendrer du nouveau avec du connu, alors que la plupart des moyens d'actions ne font pas sortir du connu. Et quand ils permettent d'en sortir, comment contrôler le nouveau produit.

Très général ement, nous pensons que l'enseignement a à résoudre une contradiction entre le besoin de se placer dans la continuité de ce que savent les élèves et la nécessité de faire progresser le savoir (de faire avancer le temps du savoir, dit Yves Chevallard) et donc d'introduire du nouveau qui peut être en rupture avec l'ancien. Les deux pôles de cette contradiction sont d'une part l'action propre de l'élève (aussi bien dans un contexte familier où il peut mobiliser du connu, que dans un contexte nouveau où l'action est a priori impossible et où il n'est pas tenu de savoir faire), d'autre part l'apport extérieur : le maître en est l'acteur lorsqu'il fait son "cours" avec, rappelons, le risque que l'élève ne puisse se l'approprier et par suite ne puisse le réinvestir dans un contexte où il sera tenu de savoir faire. De ce point de vue, tout enseignement revient à privilégier dans le temps (ce qui ne veut pas dire "réduire à") un des pôles (ou les deux alternativement) au détriment de l'autre : par exemple, la pédagogie courante privilégie le cours, la pédagogie active l'action, ce que nous proposons est un système alternatif et interactif.

Ceci dit, quel que soit le système d'enseignement choisi, l'enseignant en position de contrôle de l'un des pôles, perd le contrôle de l'autre. Il en résulte une incertitude dont le domaine dépend des choix :

- Pour le maître, quel cours faire ? Quelles connaissances les élèves ont-ils acquises ? Quelles situations contrôlent-ils avec les connaissances acquises ?

- Pour l'élève : "est-ce que je saurai résoudre les problèmes qu'on va me poser ?"

Soulignons qu'il n'y a plus d'incertitude si l'élève se trouve en phase

d'action où il n'est pas tenu de fournir une réponse finale.

S'il est vrai que la progression du savoir de l'élève ne peut se faire de manière continue, alors l'enseignant est contraint d'osciller entre le connu et l'inconnu de l'élève. Ceci nous amène à formuler une sorte de "principe d'incertitude" (élaboré avec Aline Robert).

Nous faisons l'hypothèse que tout système d'enseignement comporte de l'incertitude quelque part : du côté de l'élève si le pôle "cours" est privilégié, du côté du maître si le pôle "action" est privilégié. Nos propositions d'enseignement reviennent à répartir dans le temps l'incertitude entre le maître et l'élève. Elles provoquent de la sorte, par rapport à la pédagogie "cours-exercices' un déplacement de l'incertitude, et par suite du malaise, de l'élève (quant à ses acquisitions) vers le maître (quant au déroulement du temps du savoir). Ceci dit, ce déplacement de l'incertitude est de notre point de vue bénéfique pour l'élève mais à certaines conditions.

Pour l'élève, comme pour le maître, l'incertitude n'est en effet acceptable que si elle peut être contrôlée. Le maître la contrôle grâce aux phases d'institutionnalisation au cours desquelles il fixe le savoir que tous dans la classe doivent avoir en commun. Il contrôle les connaissances et moyens d'actions des élèves grâce aux exercices et problèmes qu'il leur demande de faire. Par ailleurs, la dialectique outil-objet et les jeux de cadres, par la surabondance d'informations et la nécessité de cohérence qu'elle entraîne, fournissent à l'élève des moyens de contrôle et de modification de la situation. Mais pour s'enclencher, la dialectique outil-objet a besoin que les élèves disposent d'une certaine liberté de manoeuvre, ce qu'autorise le système. De plus, les problèmes et exercices sont pour l'élève l'occasion de se familiariser avec le savoir institutionnalisé, de contrôler ses acquisitions et ainsi de faire le point sur sa structuration personnelle. Par là-même, il maîtrise son incertitude.

Cette gestion de l'incertitude, tant pour le maître que pour l'élève est un élément important dans les rapports enseignement-apprentissage. De ce fait, la formation des maîtres devrait comporter aussi l'étude de cette gestion, en particulier des moyens de récupérer le contrôle de la situation didactique en respectant l'incertitude.

En résumé, toutes nos initiatives visent à créer des déséquilibres, mais de manière telle que les élèves puissent participer activement à leur propre rééquilibration sur le plan cognitif. Pour cela, nous agissons soit sur les contenus (dialectique outil-objet, jeux de cadres) soit sur les rapports sociaux (situations de communication, conflits socio-cognitifs...). Il n'en reste pas moins qu'il y a très certainement des conditions extra-cognitives nécessaires pour que la rééquilibration soit possible pour et par l'élève. Citons, à titre d'exemples, celles relatives aux rapports de force entre élèves au sein du groupe de travail (qu'il s'agisse d'une petite équipe ou de la classe toute entière) aux rapports affectifs entre le maître et les élèves, à l'intérêt que portent les parents au travail de l'enfant etc...

10 - APERCU DE LA METHODOLOGIE.

Un concept se construit sur une longue période de temps qui s'évalue en années. Ce fait fondamental nous a conduit à adopter la méthodologie suivante :

a) Construction d'un enseignement sur les 5 années de l'école primaire.

Nous avons élaboré un ensemble de séquences répondant d'aussi près que possible aux hypothèses énoncées dans le paragraphe 8. En particulier, nous avons été contraints de faire des choix dans les problèmes pour qu'ils répondent à nos conditions. Nous décrivons le schéma général des séquences au chapitre II.

b) Observation de cet enseignement.

Une première observation exploratoire a été nécessaire à l'élaboration puis à la mise au point des séquences. Les observations de l'expérience elle-même sont de plusieurs types :

- Enregistrement des phases collectives des séquences en classe au magnétoscope.

- Chroniques.
- Tests écrits
- Entretiens individuels en dehors de la classe.

L'expérience centrale a été menée sur une même promotion d'enfants du CP au CM2. Mais nous n'avons pas, bien entendu, recueilli toutes les formes d'observation pour tous les enfants sur les 5 années. Cependant, nous avons d'autres observations complémentaires sur d'autres enfants. Nous avons choisi de présenter et de développer l'analyse de certaines séquences qui nous paraissent caractéristiques de notre type d'enseignement (cf. Ch. II).

c) Evaluation de cet enseignement.

(Elaboration de prévisions, comparaison comportements-prévisions, conclusions didactiques).

En comparant les outils et les stratégies mobilisés pour résoudre les problèmes posés à ceux ayant fait l'objet de notre apprentissage nous tâcherons d'établir s'il y a ou non des liens de cause à effet entre la mise en oeuvre de nos hypothèses et les résultats des élèves.

Cela étant, nous ne connaissons pas de moyens d'affirmer de façon certaine qu'il n'y a pas d'hypothèses autres, non formulées, vérifiées à notre insu dans nos séquences et qui non seulement pourraient expliquer les résultats mais même en seraient des conditions nécessaires. En revanche, nous vérifions dans quelques cas particuliers représentatifs, que nos hypothèses provoquent les mécanismes de déséquilibre et équilibration majorante auxquels Piaget attribue la construction des connaissances. Nous vérifions aussi que dans les enseignements pratiqués couramment, nos hypothèses ne sont pas à l'oeuvre et ce, indépendamment de la réforme des programmes.

11 - RESTRICTIONS ET ELARGISSEMENT.

a) Signalons que pour des raisons déontologiques la marge de manoeuvre avec les élèves est très étroite. Notre contrat, en tant que chercheur, avec les élèves et l'institution sociale (le maître, les parents, la hiérarchie) est que nous essayons de répondre à nos problèmes tout en assurant aux élèves un apprentissage au moins équivalent (et de préférence meilleur) à l'apprentissage standard. Par ailleurs, nous ne pouvons passer sous silence un certain nombre de variables cognitives que nous n'étudions pas. Pourtant, non seulement elles auraient pu intervenir dans nos hypothèses mais encore nous les savons à l'oeuvre dans notre enseignement sans que nous puissions encore en contrôler ni les effets ni les imbrications avec les autres hypothèses.

Ainsi en est-il du rôle de la mémoire, de la rapidité (ce qui est particulièrement développé à l'occasion d'une certaine pratique du calcul oral), de la périodicité et de la durée des séances de travail. On voit bien encore là, à quel point nous ne testerons que des hypothèses composées.

b) Recherches en mathématiques.

Les observations de chercheurs en activité ainsi que les études épistémologiques de mathématiques montrent que les jeux de cadres et dans une certaine mesure la dialectique outil-objet sont couramment à l'oeuvre dans la production des connaissances. Ceci renforce nos choix d'hypothèses.

CHAPITRE II

Un projet d'enseignement et des éléments d'une réalisation.

1. Introduction.

1.1. Présentation

Notre but est de repérer la relation entre l'enseignement effectivement réalisé, l'apprentissage correspondant et la disponibilité d'un certain savoir, en particulier des nombres décimaux, pour résoudre des problèmes où ce savoir est un outil adapté.

Pour cela, nous exposons d'abord les raisons de nos choix d'enseignement et leur organisation globale. Nous décrivons et analysons ensuite certaines situations d'apprentissage au CP [II,2] et au CE1 [II,3] dans les termes de nos choix. Nous renvoyons d'une part à un article paru dans la revue RDM [Dou 2], d'autre part à une brochure IREM écrite en collaboration avec Marie-Jeanne PERRIN (à paraître), dans le but d'avoir une information complète sur la génèse des décimaux que nous proposons.

Nous présentons schématiquement tout de même les séquences qui se sont déroulées au CE2 [II,4] et nous donnons quelques indications sur ce que nous connaissons de l'enseignement effectué en CM 1 et CM 2. Ceci constitue à la fois une illustration concrète de la mise en oeuvre des hypothèses exposées au chapitre I et le moyen de vérifier par l'intermédiaire de leur réalisation la validité de ces hypothèses.

1.2. Raisons des choix.

1.2.1. Le point de vûe du mathématicien.

Nous allons présenter notre étude sur l'apprentissage des nombres décimaux. Les nombres décimaux constituent un ensemble ordonné $\mathbb{D}$ de nombres, stable pour les opérations $+$, $-$, $\times$, lesquelles sont compatibles avec l'ordre. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels aussi. Mais $\mathbb{D}$ jouit, par rapport à $\mathbb{Q}$, d'un privilège dans les problèmes de mesure, car il conjugue deux avantages:

- il permet (comme $\mathbb{Q}$) d'approcher les réels avec une précision arbitraire;
- compte tenu de l'écriture en base 10 , les calculs et comparaisons sont techniquement faciles.

Le fait que $\mathbb{D}$ ne soit pas stable par division est un inconvénient mineur par rapport à la facilité de calcul.

Autrement dit, les décimaux sont un outil adapté pour tout travail effectif dans une situation de mesure ou d'approximation. Or ces situations sont très générales [Leb], et ce sont elles qui justifient plus tard la construction de $\mathbb{R}$.

1.2.2. Le point de vue de l'enseignant.

Si nous voulons que l'apprentissage prenne appui sur le rôle essentiel que les décimaux jouent dans le calcul scientifique et pas seulement dans la vie quotidienne, nous sommes tenus d'inscrire dans notre enseignement l'étude de tels problèmes.

Pour cela, nous avons choisi des problèmes qui pourraient s'exprimer dans le cadre géométrique et dans le cadre numérique. La nécessité de discrétiser artificiellement la réalité pour pouvoir la décrire, confrontée à la nature continue des grandeurs (longueurs, aires...) crée le déséquilibre d'où naîtra la pression qui mène à la construction des réels. Dans les problèmes que nous avons choisis, les nombres interviennent d'abord comme mesures de longueurs ou d'aires. Ils désignent ensuite des solutions d'équations traduisant des relations entre grandeurs. Dans le cadre géométrique, les élèves peuvent conjecturer l'existence des solutions. Il est peu vraisemblable qu'ils puissent le faire dans le cadre numérique, où on n'a plus la très grande force de conviction du principe des valeurs intermédiaires. Les mesures seront d'abord des entiers, puis des fractions, en particulier des fractions décimales. Certaines équations n'admettent pas de solution rationnelle. Les nombres décimaux permettent d'en donner des solutions approchées avec une précision arbitrairement grande. C'est pourquoi de telles équations auront une place importante dans l'apprentissage des nombres décimaux.

Précisons avec un exemple: Parmi les rectangles d'aire 27 cm^2 , existe-t-il un carré?

La question de son existence est, pour les élèves de l'école élémentaire, toute philosophique. Elle nous intéresse en tant qu'indice pour repérer des différences chez les élèves. En revanche, la construction de couples (u,v) avec $u^2 < 27$, $v^2 > 27$, tels que les différences $v - u$ forment une suite décroissante (sans préjuger de la convergence) est l'objet de la situation d'apprentissage et concerne tous les élèves.

Par exemple, $(5 ; 6)$ est un premier couple. Pour progresser, l'élève doit s'intéresser à la progression de $x \cdot x$ quand x augmente de 5 à 6 . S'il connait quelques fractions: les $p/2$, les

$p/4$, les $p/8$ etc..., mais aussi les $p/3$ et les $p/6$ et quelques autres, et qu'il sait calculer avec, et les comparer, il peut fabriquer de meilleurs encadrements: $(5+\frac{1}{8} \, ; \, 5+\frac{1}{4})$. Mais les calculs sont pénibles. Pour comparer $u \times u$ à 27 , il a besoin de rechercher les parties entières de fractions > 1

S'il sait manipuler les $p/10$, les $p/100$,... , et qu'il a une bonne connaissance de la numération en base dix, les calculs sont plus aisés. Il peut alors fabriquer beaucoup de couples $(u \, ; v)$ où u et v sont de la forme p_o , $p_o + p_1/10$, $p_o + p_1/10 + p_2/100$, $p_o + p_1/10 + p_2/100 + p_3/1000$. Il pourrait continuer ainsi de suite.

Ces nombres sont décimaux et admettent une écriture standard à virgule. Leur traitement numérique est celui des fractions. Mais la réalisation technique est remarquablement facilitée par le choix des dénominateurs.

Nous avons vu dans ce problème que le repérage des éléments fixes et des éléments variables, la recherche des relations qu'ils peuvent entretenir et des modes de variation sont des éléments d'étude au voisinage de la situation proposée, des éléments importants pour progresser dans le problème. Ce que nous venons de dire est vrai plus généralement. Les notions mathématiques en jeu sont celles de constante, variable, fonction, voisinage. Ce sont des outils indispensables à l'analyse du problème. Cela explique notre volonté d'introduire des problèmes où les données sont les unes sujettes à variation, les autres fixes, dans un contexte géométrique.

De notre point de vue, l'apprentissage des décimaux est inséparable d'un certain apprentissage des fonctions en tant qu'outil, non en tant qu'objet. Pour cela, chaque fonction doit être considérée comme une, de

façon à pouvoir être maitrisée globalement, ou au moins au voisinage de certaines valeurs de la variable, et non comme une collection infinie de points qu'on ne saurait comment organiser. D'où la nécessité d'un référentiel effectivement infini (longueurs, aires, durées), ou si nombreux qu'il est assimilé à l'infini dans le traitement (plus de 1000 points à traiter dans le quadrillage), et l'intérêt de choisir des problèmes issus de la géométrie et relatifs à la mesure, dans lesquels le continu de l'espace joue implicitement et dans lesquels la variation de la mesure a de bonnes propriétés (continuité, monotonie par intervalles).

Par exemple, dans le problème de recherche d'un carré d'aire donnée, on utilise implicitement la continuité et explicitement le sens de variation de la fonction $x \longmapsto x^2$. Dans la recherche, parmi les rectangles de demi-périmètre p donné, d'un rectangle d'aire maximum, on recherche implicitement le sens de variation de la fonction $x \longmapsto x.(p-x)$, où x est l'une, privilégiée, des dimensions du rectangle. Dans la recherche de rectangles d'aire fixée, on étudie explicitement les variations réciproques des dimensions.

1.2.3. Des outils pour l'enseignant

Toutes les procédures auxquelles les problèmes précédents amènent ont peu de chance d'être menées à leur terme si elles ne prennent pas appui sur les conceptions des élèves. C'est la condition pour qu'ils puissent prendre des initiatives créatrices dont ils soient en mesure de contrôler le sens et le rapport au problème.

Par ailleurs, pour qu'il y ait création collective plus riche que celle de chacun et que cette création collective ait des retombées individuelles, il faut, autant que faire se peut, que chacun puisse " entendre " l'autre. Il faut donc se donner au sein de la classe, des moyens de communication entre conceptions différentes.

Un rôle des jeux de cadres est d'établir ces communications. Toutefois, pour que celles-ci soient effectives, il faut à la fois que chacun dispose d'un seuil de connaissances dans chaque cadre, et qu'au delà, la diversité se manifeste. Or, il est dans le contrat standard de l'école, d'acquérir un certain nombre de connaissances sur les nombres et en géométrie. Mais le point de vue est essentiel-lement algorithmique pour l'un, perceptif pour l'autre. les deux cadres restent étrangers dans leur fonctionnement.

L'introduction du cadre fonctionnel et du cadre de la représentation sous l'angle algébrique et sous l'angle graphique permet la communi-cation entre cadres et du coup, leur restitue leur puissance et même la développe.

b) La dialectique outil-objet est un moyen de s'appuyer sur les conceptions des élèves. Nous en donnons plus loin des exemples.

c) Les représentations graphiques: un signifiant pour des signifiés différents.

Les représentations graphiques sur quadrillage gradué sont adaptées aux relations entre 2 variables. Un point de la représentation est caractérisé par 2 longueurs (les coordonnées du point) qui symbolisent un couple de valeurs des variables en correspondance. Ces variables peuvent être des nombres sans signification physique ou des mesures issues d'une situation matérielle physique ou géométrique. Ainsi

les longueurs-symbole de la représentation sont des signifiants pour les signifiés qui peuvent être des longueurs impliquées dans le cadre géométrique mais aussi des nombres ou n'importe quelle grandeur physique (aire, volume, masse, durée) ou autre (prix, nombre d'objets d'une collection, nombre d'élèves, de repas etc...)

L'efficacité de la représentation graphique comme outil intervenant dans la recherche d'un problème est conditionnée par la distinction entre signifiant et signifié. Cela explique l'importance que nous accordons dans l'apprentissage à la connaissance du quadrillage (cf. CE1 construction du quadrillage, graduation, affinement de la graduation) et à la familiarisation avec la représentation graphique de fonctions diverses comme tâche en soi avant de la solliciter dans un jeu de cadres comme outil de travail et guide pour poser des conjectures. Cette distinction est de première importance quand le signifié qu'on représente est une longueur(*) ou quand un point du quadrillage représente un rectangle dont les dimensions sont les 2 coordonnées (cf. problème du coloriage du quadrillage en 3 couleurs selon que l'aire du rectangle (a,b) est supérieure, égale ou inférieure à une aire donnée).

Les courbes qui nous intéressent peuvent être considérées de deux points de vue.

- Comme ensemble de points, mis en relation avec le cadre numérique, c'est un signifiant pour un ensemble de couples de nombres, en relation selon une loi donnée valide sur un certain champ numérique.

Exemple: l'ensemble des couples (a,b) tels que $a+b = k$ ou $a \times b = k'$ où k et k' sont des constantes fixées.

(*) cf. la confusion bien connue entre la représentation de la trajectoire d'un mobile et celle de son mouvement.

Le champ numérique concerné dépend de l'élève: ce peut être les seuls entiers ou des entiers et des fractions...

Comme ensemble de points mis en relation avec le cadre de la situation, et dans l'exemple ci-dessus avec le cadre géométrique, c'est un signifiant pour un ensemble d'éléments de la situation, ici des rectangles ayant une propriété particulière: demi-périmètre fixé ou aire fixée.

- Comme partie du plan, elle bénéficie du continu géométrique. Les points "entre" 2 points repérés ont une signification dans le cadre de la situation d'origine, même si on ne sait pas désigner les nombres qui sont leurs coordonnées, voire si on ne sait pas qu'on "sait". Ce fait constitue une pression pour étendre la désignation (cf. recherche des rectangles d'aire 27 ; pour a fixé quelconque, $b = \frac{27}{a}$. par ailleurs bien connu et familier pour certaines valeurs de a) et enrichir la graduation de façon significative vis à vis du problème. Le champ numérique explicitement sollicité à un moment donné par les élèves et qui peut différer de l'un à l'autre est la trace visible en expansion d'un ensemble beaucoup plus large: les réels ≥ 0 , modèle mathématique des longueurs et des aires, plus généralement des grandeurs physiques.

1.3. Plan du chapitre II

Dans ce chapitre, nous présentons les connaissances que nous voulons mettre en place dans chacun des cadres auxquels nous entendons faire appel, du moins dans les problèmes que nous avons retenus. Nous donnons la description des situations d'apprentissage réalisées en CP (II,2), en CE1 (II,3), en CE2 (II,4). Certaines de ces situations concernent principalement un cadre. D'autres sont plutôt des situations de coordination dans lesquelles l'objectif est double: coordonner des outils connus dans une situation complexe, introduire un élément nouveau. Nous décrirons ces situations plutôt en termes de dialectique outil-objet (qu'on notera DOO) et jeux de cadres. En (II,5), nous examinons de façon brève un problème que nous aurions étudié si nous avions continué à travailler avec ces élèves au delà de l'école primaire.

La colonne vertébrale de notre projet didactique, sur le plan cognitif, est une genèse des nombres; en particulier, à l'école primaire, une genèse des nombres décimaux. C'est pourquoi nous présentons ci-après un plan résumant les différentes voies d'accès envisagées pour les nombres décimaux et, sous forme de diagramme, les cadres et jeux de cadres qui peuvent intervenir dans leur genèse.

Nous présentons aussi le plan de la plupart des séances de travail.

LA PREPARATION AUX DECIMAUX

Elle se fait

- du point de vue <u>topologique</u>, par l'étude de situations-problèmes inscritesdans un jeu de cadres géométrico-numérique où la recherche d'un encadrement, puis d'un meilleur etc ... est l'outil adapté.

- du point de vue <u>algébrique</u>, par la pratique de la division euclidienne.

  . en situations-problèmes où quotient et/ou reste ont un rôle à jouer.

  . en exercices en soi
  sous 2 formulations - algébrique $a = (b \times q) + r,\ r < b$

  - opération $\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}$

  * intervenant de manière adéquate dans les problèmes
  * systématiquement dans les exercices

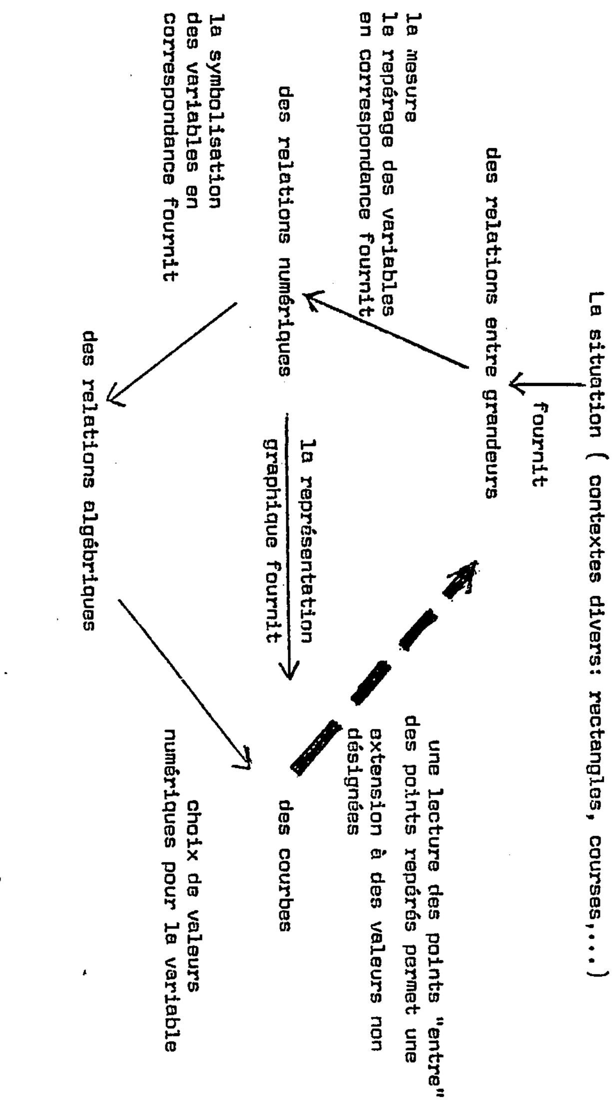
- du point de vue <u>numérique strict</u>

  . par une pratique journalière du calcul oral avec explications, justification ou rejet argumenté des diverses procédures de calcul.

  . par un retour périodique à la signification de la numération de position.

  . par le calcul impliqué dans les situations.
  Il n'y a pas d'entraînement systématique à des opérations écrites. Celles-ci interviennent toutefois dans des épreuves dont le but est de tester la compétence des élèves sur ce point.

Le cadre <u>fonctionnel</u> est introduit en interaction avec le cadre de la <u>représentation</u> comme cadre de travail. C'est le caractère outil des fonctions qui va être sollicité.



Le contrôle par le calcul(et la familiarisation avec le calcul), dans les limites d'une marge imposée, étend les relations.

Diagramme de jeux de cadres possibles

Plan d'une séance

- Une séance débute en général par une phase de calcul oral qui dure une dizaine de minutes.
- Une deuxième phase est consacrée aux rappels des séances précédentes s'il s'agit d'un thème en cours d'étude. Elle dure aussi une dizaine de minutes, éventuellement plus (cf III jeux de cible).
- Le travail concernant les nouvelles consignes se déroule en 3 temps:
  - . Exposition de la consigne, avec discussion collective sur l'énoncé pour lever toute ambigüité.
  - . Travail individuel ou en équipe, Eventuellement mise au point partielle en cas de difficultés rencontrées sur un même point par plusieurs élèves; fin de la séance.
  - . Bilan collectif: présentation des résultats à travers des exemples représentatifs s'il s'agit de travail individuel, des réultats de chaque équipe sinon. Cette présentation est accompagnée d'un débat sur les productions comparées et suivie d'une conclusion.

Une séance dure en général 1h1/2 : c'est la plage horaire avant la récréation. Elle peut reprendre après la récréation ou peut-être l'après-midi, celle du lendemain est alors en général supprimée ou réduite au calcul oral.

2. Cours préparatoire (CP).

1er trimestre : Construction de nombres et de systèmes de réprésentation

2.1- Des Nombres aux représentations

2.1.1- Désignation d'objets et de relations

L'ancien est constitué par des objets matériels que l'enfant connaît et par les actions qu'il produit : toucher, saisir, déplacer etc ... des objets. Avancer, reculer, tourner, se déplacer etc ... dans l'espace qui l'entoure.

Le nouveau visé est la désignation par des signes des objets et des actions.

L'égalité est un outil à institutionnaliser plus tard. Plusieurs signes peuvent désigner un même objet, un signe ne peut désigner qu'un objet sous peine d'ambiguïté.

C'est aussi la représentation de relations : flèches entre désignations d'éléments en relation, organisation en tableau des couples d'éléments en relation (17/10/75).

2.1.2- Correspondance terme à terme : plus, moins, autant.
Tris, constitution de boîtes*.

On met ensemble dans une boîte des collections qui ont autant d'objets. On donne un signe à la boîte. On constitue 3 boîtes. On désigne chaque boîte par un signe différent. Notons qu'ici, on utilise des signes dans une situation plus complexe que précédemment. Les objets à comparer sont multiples.

Plusieurs signes sur une même boîte vont donner lieu à des égalités. L'outil implicite "égalité" va fonctionner en situation de communication et donner lieu à une formulation. Institutionnalisation de "3 = *" par exemple. Les signes numériques sont institutionnalisés. Le nouveau ici est d'une part un signe pour dire autant, (un pour dire "plus", un pour dire "moins" éventuellement), d'autre part une procédure pour savoir si 2 collections ont autant d'objets.

Les premiers nombres 2, 3, 5 peuvent avoir pour l'enfant un statut

* De la taille d'une boîte de chaussures.

d'objet matériel dans la mesure où il connait les noms, et où il sait reconnaître globalement une collection de 2, 3, 5 objets matériels.

2.1.3- Rangement des boîtes du moins au plus

La connaissance sur laquelle on s'appuie est celle d'une procédure pour savoir si 2 collections ont autant d'objets. Pour ordonner les boîtes, on ordonne l'ensemble obtenu en prenant une collection dans chaque boîte. L'outil implicite qui justifie cette procédure est la compatibilité de l'ordre et de la relation d'équivalence "avoir autant d'éléments" ou encore "être dans la même boîte". Le théorème en actes est le suivant :

Si $A = B$ et $B < C$ alors $A < C$

2.1.4- Construction de nouvelles boîtes

En réunissant les objets de 2 collections différentes on obtient une nouvelle collection. Si elle a autant d'objets qu'une collection connue, on peut mettre ces deux collections dans une même boîte. Sinon, c'est un nouvel élément d'une nouvelle boîte. Plusieurs activités se présentent :

- constituer d'autres collections ayant autant d'objets que la nouvelle en puisant dans un gros tas.

- Repérer, parmi les boîtes connues, des boîtes dont l'association amène à la constitution de la nouvelle boîte.

La question de la désignation de la nouvelle boîte se pose. Une grande diversité se présente prenant en compte les différents signes des boîtes et le mode de construction des nouvelles boîtes.

Les connaissances utilisées sur lesquelles on s'appuie sont la correspondance terme à terme, les signes numériques et l'égalité entre signes désignant un même objet.

Le nouveau est le signe "+" pour représenter l'opération entre boîtes et permettre la désignation de nouvelles boîtes.

2.1.5- Jeu de cadres entre le matériel et le symbolique

Des situations de communication vont provoquer la mise en relation du cadre symbolique et du cadre matériel, citons un exemple : dans un jeu

émetteur-récepteur, l'émetteur dispose de plusieurs collections. Il en fabrique une à l'aide de 2 ou 3 collections prises dans son stock. Il envoie un message, composé uniquement avec des signes, au récepteur qui doit avec ce message constituer une collection ayant autant d'éléments. Le contrôle est assuré par la comparaison matérielle des 2 collections de l'émetteur et du récepteur.

2.1.6- Relation "entre"

Les boîtes constituées, désignées, sont rangées du moins au plus. Est-il possible d'en placer une nouvelle entre deux boîtes côte à côte ?

2.1.7- 1 de plus, 1 de moins (du point de vue de l'action)
Constructions de boîtes consécutives.
Désignations $a + 1$, $a - 1$

Dans ce travail, l'outil implicite est toujours la compatibilité de l'ordre et des opérations avec la relation d'équivalence "avoir autant d'éléments". Le travail dans le cadre matériel, les preuves matérielles sont fournies sur les collections. La symbolisation porte sur les boîtes. On pointe le fait suivant : entre deux boîtes dont les collections ne diffèrent que d'un élément on ne peut placer aucune boîte. La boîte a est précédée de la boîte $a - 1$ et suivie par la boîte $a + 1$. (Il s'agit seulement de désignations).

2.1.8- Institutionnalisation de tous les signes numériques entre 1 et 9

2.1.9- $a \neq a - 1$. La boîte vide. 0.

2.1.10- $a \neq a + 1$

A partir d'une boîte, on fabrique une nouvelle boîte. En adjoignant un élément à une collection, on fabrique une collection qui ne va pas dans la même boîte.

On pourrait toujours fabriquer de nouvelles boîtes.

Signalons que pour les élèves, ce "toujours" n'a pas la valeur générale qu'on pourrait lui accorder. Il est relatif à leur champ de connaissance ou un peu au-delà.

2.1.11- Pratique du calcul

Elle est à la fois orale et écrite. Les élèves calculent dans deux types de situations : en calcul oral, tous les jours pendant 10 minutes au début de chaque séance. Ils calculent aussi au cours de recherche de solutions de problèmes dans des phases de familiarisation ou de compte-rendu collectif. Un même calcul donne lieu en général à plusieurs procédures examinées, contrôlées, rectifiées éventuellement après avoir décelé l'origine de l'erreur.

2.1.12- Elaboration d'un langage algébrique

Nous décrivons ci-dessous une des situations qui a donné lieu à l'élaboration d'une formulation algébrique, en termes de dialectique outil-objet et jeux de cadres. Il s'agit d'un jeu issu des situations didactiques proposées par G. Brousseau au CP.

Jeu à deux : L'équipe reçoit un sac avec des pions. Un des joueurs puise les pions dans le sac, les observe, puis il se retourne pour ne plus voir les pions. L'autre alors en prélève une partie qu'il cache. Au vu des objets restants, le premier joueur doit deviner le nombre de pions cachés.

Ils recommencent une partie en échangeant les rôles.

Le contrôle du résultat est facile, il suffit d'exhiber les pions cachés. Il s'agit d'une phase d'action.

phase a D. O. O. : le sac comporte peu de pions.

phase b D. O. O. :

- le sac comporte assez de pions pour que la perception globale ne puisse jouer.

La soustraction et la notion d'inconnue sont ici les outils implicites.

- On demande aux 2 joueurs d'envoyer un message à un autre joueur pour qu'il puisse avec un partenaire jouer la même partie.

Cela est suivi d'une discussion entre les 2 équipes pour savoir si les récepteurs ont joué comme les émetteurs, en particulier si le récepteur du message a caché autant d'objets que l'émetteur.

phase c D. O. O. : Les propositions d'écriture font ensuite l'objet d'une discussion collective en bilan. Les élèves aboutissent à des écritures du type $⁂ + 3 = 5$.

L'existence de la collection cachée est attestée sur le plan de l'écriture par le signe ⁂. Dans la partie ci-dessus, $⁂ = 2$. Dans une autre partie, ⁂ peut prendre une autre valeur. C'est ce qui est pointé au compte-rendu collectif, à la comparaison des différents messages.

2.1.13- Une correspondance entre le langage algébrique et le langage numérique.

Il s'agit pour l'élève de se familiariser avec la signification de ⁂ dans $⁂ + a = b$ pour des a et b donnés numériquement :

$⁂ + 4 = 7$ $\quad$ $⁂ + 3 = 8$ $\quad$ $2 + ⁂ = 6$ $\quad$ etc ...

Cette question est en général reliée à la décomposition d'un nombre en somme de 2 nombres.

$⁂ + 4 = 7$ est plutôt compris comme - parmi les différentes manières de faire 7 que je connais, y en a-t-il une qui comporte un 4 -.

2.2- Des représentations aux nombres

Citons pour exemple des thèmes effectivement traités en novembre-décembre 1975 dans le CP qui nous intéresse. Ils concernent la mise en place d'un nouveau cadre de travail : la représentation..

27/11/75 1) $⁂ + a = 5$

2) codage des rues simulées par les allées entre les tables.

Ceci fait suite à un codage des tables de la classe à propos d'une réunion des parents d'élèves. Chacun avait reçu à l'entrée un carton portant le signe de la table de son enfant. Un effort avait été fait pour que le repérage soit facile : les tables avaient été organisées en rangées, les rangées numérotées et chaque table numérotée dans sa rangée. On donnait à l'entrée aux parents le code de lecture du carton.

2/12/75 Quadrillage sur le sol du préau.

<u>Phase</u> a D. O. O. : Un jeu de rendez-vous, par message sans dessin, sur les croisements du quadrillage.

Le problème ressemble à celui des parents entrant dans la classe. Peut-on adopter pour les croisements du quadrillage, le mode de désignation des tables dans la classe.

<u>Phase</u> b D. O. O. : Recherche d'un procédé commode et systématique de désignation des croisements.

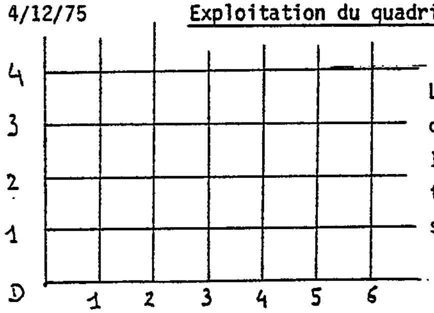
outil : un noeud du quadrillage est caractérisé par 2 informations : les signes des lignes qui s'y croisent.

<u>Phase</u> c D. O. O. :

- Elaboration de couples ($\ast$, Δ) numériques pour désigner un croisement.
- Distinction ($\ast$, Δ) et (Δ, $\ast$).

<u>Phase</u> d D. O. O. : Institutionnalisation du mode de repérage des lignes et des croisements du quadrillage comme instrument de représentation.

4/12/75 <u>Exploitation du quadrillage</u>



La maîtresse a affiché au tableau un quadrillage représentant celui du préau. Il est gradué de la même façon. Elle retient toutefois qu'un croisement est un signifiant pour un couple de nombres.

La consigne est de rechercher tous les croisements pour lesquels $\ast + \Delta = 6$. C'est une occasion à la fois de tester les élèves sur leurs connaissances numériques et de les familiariser avec les nombres. Le langage est différent selon le contexte (matériel, numérique, graphique) auquel il se réfère, mais les informations doivent être cohérentes.

Dans $\ast + \Delta = 6$, l'outil implicite est la notion de fonction : on peut choisir l'une des valeurs, et l'autre est alors déterminée. Pour l'élève, il s'agit de trouver 2 nombres dont la somme soit égale à 6. Il y a plusieurs possibilités.

<u>Phase</u> e 5/12/75 Alignement de points sur le quadrillage
- travail collectif

Construction et observation de "l'alignement" des "6", des "5", des "4" etc ...

8/12/75 . Pratique orale de la recherche de $\ast$ tel que

$$a + \ast = b$$

La maîtresse présente la question sous forme de devinette. Elle interroge les élèves à tour de rôle sur une équation différente.

Le contrôle est graphique

Exemple : $2 + \ast = 5$ $4 + \ast = 7$ etc ...

9/12/75 . Nouvelle consigne : $\ast + \Delta = 7$

Recherche de couples convenables.

Chacun vient indiquer sur le quadrillage du tableau (10 x 10 noté de 0 à 9) un couple répondant à la question.

11/12/75 Fonctionnement du codage du quadrillage dans une nouvelle tâche.

Une situation de communication à 2 :

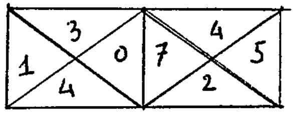
émetteur et récepteur disposent d'un quadrillage. L'émetteur fait un dessin sur son quadrillage en joignant des croisements par des traits. Il envoie un message sans dessin sur feuille blanche à un récepteur qui doit reproduire sur son quadrillage le même dessin.

Si le récepteur ne comprend pas le message, il le renvoie avec des questions "écrites" à l'émetteur.

Le contrôle se fait par comparaison des dessins de l'émetteur et du récepteur. Les erreurs font d'abord l'objet d'une discussion entre les 2 protagonistes. Elles interviennent également dans la présentation collective des travaux lors du bilan.

16/12/75 Pratique de connaissances établies

- jeu de cartes à 2



Dans chaque case est écrit un nombre compris entre 0 et 7 (bornes incluses). Un joueur pose une carte - L'autre joueur pose une autre carte côte à côte sur l'un des 4 côtés de la carte à la condition que la consigne "a + b = 7" soit respectée. Il est entendu et précisé que a et b désignent des nombres.

Vacances

Conclusion :

A la fin du trimestre, on peut considérer que des éléments de base ont été mis en place dans le cadre numérique, et dans le cadre de la représentation sous ses 2 formes algébrique et graphique. Il reste à voir leur disponibilité et leur efficacité pour les élèves dans les tâches qui leur seront demandées (cf. cibles).

2e trimestre : Extension des nombres - Numération - Longueurs

2.3- Extension des nombres

Toutes les séances commencent par une phase de calcul oral nommée par la classe "jeu de l'autobus" : des voyageurs montent, d'autres descendent. On compte à chaque étape le nombre de voyageur dans l'autobus. Cette phase dure une dizaine de minutes. Elle est réclamée par les enfants quand la maîtresse essaie de gagner ces 10 minutes pour une autre activité.

6/1/76

1) Un test de conservation des quantités type "Piaget". Tous les enfants sont conservants.

2) Une activité de groupement pour comparer des collections trop nombreuses.
Les élèves sont groupés par 2. A chaque élève la maîtresse distribue une boîte contenant beaucoup de petits

coquillages. Le problème est de comparer les 2 tas.
Signalons quelques procédures mises en action :

-" on les étale, on regarde celui qui prend le plus de place".
-" on fait une montagne, on voit la plus haute".
-" on les compte".
-" si on ne sait pas compter jusqu'à la fin, on les met en ligne".
-" on les met par paquets".

6 groupes priviligient cette dernière procédure.
1 groupe y vient après échec du comptage et de la bijection. Les autres se répartissent diversement.
Dans cette situation, les objets sont déplaçables et la bijection est encore possible, même si le comptage ne l'est pas.
Pour que les élèves changent la procédure, il faut que celle qui est familière soit nettement en échec. Nous avons repris dans une autre classe, une situation proposée par G. Brousseau.

Une feuille 21 x 29,7 est partagée en 2 par un trait. De part et d'autre, on la couvre de petits signes. Les objets de la collection sont les signes, on ne peut pas les déplacer comme les objets matériels auparavant. Les signes sont disposés arbitrairement dans la feuille. Et le problème est de comparer les 2 collections de signes à gauche et à droite.
Le travail se fait à 2 élèves, chacun s'occupant d'un côté de la feuille.

Revenons à notre classe.

Nous ne faisons pas ici l'analyse des procédures. Nous pointons seulement qu'à cette séquence apparaissent les premiers groupements par paquets dans lesquels on sait compter, et la correspondance terme à terme de paquets où il y a autant de signes. Les paquets situés d'un même côté, donc regroupant des signes d'une même collection, ne comportent pas le même nombre de signes. La nouveauté pour les élèves ici réside dans la mise en oeuvre coordonnée de connaissances acquises séparément.

8/1/76	Groupement systématique par 3
13/1/76	Une notation pour désigner la quantité d'éléments est adoptée collectivement et écrite au tableau. Elle fait intervenir des groupements de paquets, des tableaux de numération à 2 colonnes.
15/1/76	Fiche de contrôle sur les groupements par 3. Groupement systématique par 5. Ecriture.

2.4- Longueurs

Du 20/1/76 au 10/2/76

Le thème principal de travail porte sur les longueurs et désignation d'objets non numériques mais entre lesquels on peut faire des comparaisons. On peut aussi faire des opérations qui ressemblent beaucoup à celles entre les nombres. L'objectif est de reproduire avec des baguettes à propos des longueurs, la démarche de construction des premiers nombres. L'intérêt est, dans un premier temps, de mieux maîtriser les propriétés des nombres entiers en pointant des ressemblances et des différences avec les longueurs dans le cadre matériel des baguettes. Le point le plus accessible et par ailleurs très important est le suivant : étant données deux baguettes de longueurs différentes, on a pu jusqu'ici fabriquer une autre baguette plus courte que l'une, plus longue que l'autre. Etant donnés deux nombres, on ne peut pas toujours insérer un 3e nombre entre les deux. Y a t-il une situation analogue pour les longueurs?

Un autre intérêt des longueurs est de fournir ultérieurement avec la droite graduée une représentation des nombres.

Remarque sur les thèmes d'étude.

L'étude des longueurs n'est pas exclusive pendant cette période. l'étude algébrique et numérique continue mais se place dans une phase de familiarisation et de routine. Ceci explique le contenu des épreuves du 29/1/76.

20/1/76 Classements divers des baguettes selon le caractère retenu : couleur - matière - flexibilité - taille etc ...

22/1/76 1) Comparaison de baguettes. Codage des baguettes.

- Il est nécessaire de donner des signes différents à des baguettes différentes. Ceci déclenche une discussion sur la signification du signe "=".
- Deux baguettes différentes peuvent être aussi longues, "avoir la même longueur".
- On choisit un signe pour dire "longueur" "ΓA" veut dire longueur de la baguette A

2) Comparaison de baguettes qu'on ne peut pas déplacer. Comparaison de la longueur du bureau et de la longueur du tableau.
Les longueurs sont suffisamment proches, les objets suffisamment loin l'un de l'autre pour que la perception ne puisse pas jouer.

- Il est nécessaire de recourir à un intermédiaire déplaçable.
Les élèves le choisissent assez long pour simuler le déplacement et pratiquement faire en sorte qu'il s'agisse d'une comparaison directe .

27/1/76 Rappel de la séance précédente.

- Ecriture de la comparaison des longueurs.

29/1/76 Test

si x =	3 5 6	x varie
que vaut x + 2		

3/2/76 Utilisation d'une petite baguette pour en mesurer une grande.
Le problème se présente matériellement :

- combien de petites baguettes peuvent rentrer dans la grande.
- On peut se servir d'une seule petite baguette pour le savoir, à condition de la reporter convenablement : repartir de là où on est arrivé.

Commentaire sur la séquence.

La maîtresse voudrait obtenir des écritures de la forme $3b < s < 4b$. Les élèves lui opposent un refus.
Pour les élèves, 3b n'est pas une longueur.
L'écriture 3b désigne une action : on a reporté 3 fois la baguette de longueur b. L'écriture n'est qu'une représentation de la manipulation.
Le changement de cadre ne peut se faire sans une évolution des conceptions des élèves leur permettant d'interpréter 3b comme une longueur. Il faut des situations conçues à cet effet.

5/2/76 Fabrication de baguettes
10/2/76 par mise bout à bout d'anciennes
On reprend une situation de communication qui a été utilisée pour construire des collections nouvelles d'objets à partir d'anciennes.

1) Jeu émetteur-récepteur : tous deux disposent de 2 lots identiques de baguettes de longueurs différentes. L'émetteur fabrique une baguette par juxtaposition de 2 ou 3 baguettes et envoie un message écrit permettant au récepteur de construire une baguette de même longueur que la baguette fabriquée.

Ici la désignation est un outil.
Il est nécessaire de se mettre d'accord sur une désignation des longueurs de baguettes si on veut savoir de quoi on parle.

2) Chacun dispose d'un lot de baguettes, toutes de même longueur pour les 2 joueurs.
Le jeu est le même.

Exemple de formulation des longueurs :

Camillo : "il a pris 3 baguettes, il a donné un nom à la baguette, toutes de la même longueur.

$r + m + n = b$ $m = n = r$
on peut écrire $r + r + r = b$"

Isabelle : "$n + n + n = b$"

La maîtresse : "$n + n$?" E : "2n" et enfin "$b = 3n = 3m = 3r$"

Vacances de Février

De retour des vacances, la maîtresse reprend le travail de numération, les groupements par dix. Les élèves utilisent des abaques.

24/2/76 Récapitulation du travail de mise bout à bout des baguettes.

. Les élèves recherchent une désignation cohérente des baguettes et longueurs de baguettes : si M désigne une baguette, m désigne la longueur de la baguette M.

. Report de baguettes, écriture de nombreuses égalités et inégalités en utilisant la transitivité de l'ordre.

2/3/76 Mise en jeu d'une fonction

Coralie a 6 ans, son frère Frédéric a 9 ans
Quel âge avaient-ils l'année dernière, l'année d'avant ?
Quel âge auront-ils l'année prochaine, dans 3 ans, dans 5 ans etc ... ?

Ecriture de quelques correspondances.

7/3/76 Le jeu de l'autobus fonctionne pour des nombres allant jusqu'à 30 environ.

2.5- 2e-3e trimestre : Coordination des acquis - jeu de cadres, outils-objets.
Un jeu de cadres sur le thème de la course

Nous avons choisi un thème de travail dans lequel les nombres, les longueurs, la représentation sur quadrillage vont entrer en jeu de manière interactive, permettant ainsi un fonctionnement de la dialectique outil-objet. Toutefois, les concepts de temps, durée, plus vite, moins vite sont source de difficultés pour les élèves, même dans un contexte très simple. Nous notons en particulier des difficultés à se servir des connaissances numériques pour répondre à des questions sur la course. L'intervention d'un 3ème cadre en relais débloque souvent la situation.

Nous citons pour mémoire la liste des activités en mars-avril. Nous détaillons plus loin un autre jeu de cadres à l'occasion de la situation appelée "jeu de cibles".

Signalons que le thème de la course sera le thème de travail de la mi-mars à la mi-mai l'année suivante en CE_1.

7/3/76 - courses simultanées, départ en ligne sur le stade.

- course individuelle un à un. On note en liste les noms et les temps de chacun.
La course est en deux parties. Chaque coureur a 2 temps.

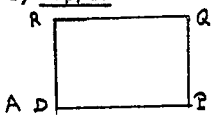
16/3/76 - Représentation sur une feuille du parcours sur lequel on a couru.

- Qui est arrivé en premier, en second etc ...

Parallèlement, des séances sont consacrées à la numération.

Vacances de Pâques

6/4/76 1) Rappel de la course



Les élèves redessinent une représentation du parcours. Ils désignent les coins.

Même si les traits n'ont pas la même longueur sur la représentation, ils désignent des parcours de même longueur sur le terrain.

Ils rappellent les résultats de la course :
le 1er, le 2e, ... les ex aequos.

2) Nouvelles informations : la maîtresse, lors de la course, avait noté les temps de chacun à chaque changement de direction. Ces temps varient entre 5 et 9 secondes. Elle affiche toutes les informations sous forme de tableau D → P → Q → R → A

Valérie	7	8	6	5
Coralie	7	6	6	6
Frédérique	7	8	7	7
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

3) Questions
On pose toutes les questions qu'on veut.
On les classe, on essaie d'y répondre.

13/4/76 Course de relais par équipe de 5 ; les parcours ont la même longueur pour chacun. Ainsi, 2 tronçons sont droits, 3 comportent un tournant.
Sur la représentation déjà faite du parcours global, on reporte les points de passage du témoin.
L'outil implicite est l'échelle.
L'outil matériel : une grande baguette qu'on reporte sur le terrain, une petite baguette en carton qui la simule en classe et qu'on reporte autant de fois. Si ça ne va pas, et c'est le cas en général, on redessine le parcours. La maîtresse a choisi la grande baguette pour que le report tombe juste.

15/4/76 1) Récapitulation du jeu de relais :
description, données, procédures de représentation, mode des désignations des éléments : coin, distance entre 2 coins.

2) Quelle est l'équipe gagnante ?
Y a t-il des ex aequos etc ...
Les temps vont de 4 à 11 secondes
Les temps globaux de 24 à 37.

22/4/76 Essai de représentation graphique t → distance échec en général, confusion prévisible entre la trajectoire et la représentation du mouvement.

27/4/76 <u>Jeu de cible</u>
Voir étude détaillée.

3. *Situations d'apprentissage au C.E.1.*
Année scolaire 1976-77

Nous donnons d'abord un plan du travail effectué chaque trimestre en termes de contenus. Nous développons ensuite certaines études en termes de jeux de cadres et D.O.O.* Nous donnons des évaluations des élèves en cours d'année.

3.1. *Plan du travail de l'année.*

1er trimestre : Le cadre de la représentation algébrique et graphique

Créer une habitude et développer une pratique du langage algébrique dans des situations fonctionnelles simples.
<u>Exemple</u> : Béatrice a 2 ans, Isabelle sa soeur (une élève de la classe) a 7 ans.
quel âge aura Isabelle quand Béatrice aura 3 ans, 4 ans etc...
Quel âge aura Béatrice quand Isabelle aura 8 ans, 9 ans,....

Il s'agit de la reprise d'une étude abordée au C.P. La situation provoque un jeu de cadres entre la réalité de l'enfant, le numérique, la représentation algébrique et graphique.

Symétries.

a) Etude dans le cadre géométrique, dessins sur papier blanc
b) Transformations du plan codées sur un quadrillage gradué
$(x,y) \mapsto (-x,y)$; $(x,y) \mapsto (y,x)$ ....
c) jeux de cadres géométrique, algébrique, numérique : l'outil étant le quadrillage gradué.

La multiplication.

a) Etude numérique
b) Etude $x \mapsto a \times x$
c) Etude graphique en interaction avec les précédentes.

* DOO ou D.O.O, abréviation pour dialectique outil-objet.

2ème trimestre : *Etude graphique*

Rechercher sur le quadrillage gradué des points alignés avec des points donnés par leurs coordonnées.

a) Il y a entre les coordonnées des points, données, des relations simples d'un type étudié : $x \mapsto x + a$ ou $x \mapsto a \times x$ avec a entier, pour différentes valeurs de a. Etude comparée des comportements des 2 types de lois.

b) Les points donnés sont alignés avec 0 mais aucune relation simple n'apparait sur les coordonnées.
Dans ce travail, les cadres numérique et graphique sont concernés.

Connaître le support graphique

a) Construction du quadrillage comme pavage du plan ; maille rectangulaire, maille carrée. Qu'est ce qui les caractérise ?
C'est un travail géométrique.

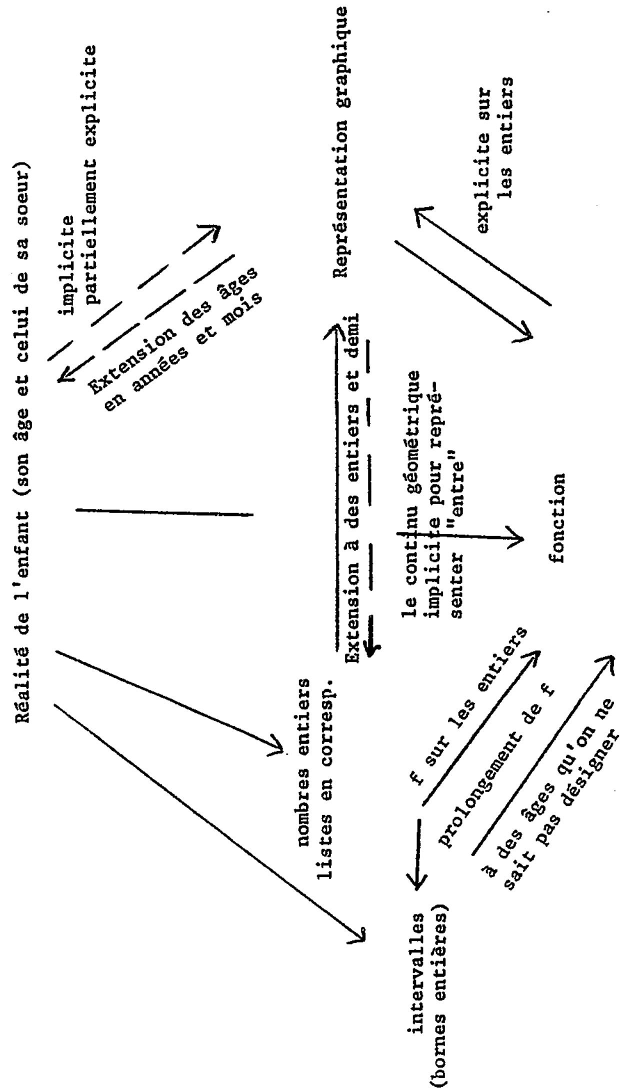
b) Graduation du quadrillage
- graduation entière : lien entre le repérage des points de la graduation et la distance entre l'origine et un point de la graduation.
- affinement de la graduation au demi, au quart, au huitième en relation avec la mesure des longueurs. Extension du champ numérique désigné et des opérations sur ce champ étendu.

Ce travail est l'occasion de jeux de cadres entre la géométrie, la représentation et les nombres.

3ème trimestre : *Coordination.*

Une situation complexe de coordination des différents outils rencontrés : la course.
C'est une reprise de la situation proposée au CP : course individuelle, course de relais.

Etude des multiples d'un nombre , caractère de divisibilité



3.2. *Langage algébrique.*

a) Il s'agit de créer une habitude et une pratique du langage algébrique dans une situation fonctionnelle simple

- ou les entiers vont servir à désigner des valeurs de la variable et les valeurs correspondantes de la fonction,
- mais où la variable, exprimée dans un autre cadre est implicitement "continue", même si la formulation est souvent "discrète".

b) Disposer d'une représentation visuelle disponible à tout moment de ce qui se passe "entre" 2 valeurs qu'on sait désigner. Le fait qu'il se passe effectivement quelque chose est assuré par regard de la situation dans un autre cadre.

Problème : Béatrice a 2 ans, Isabelle 7 ans.

Quel âge avaient-elles l'année dernière, l'année d'avant ? Quel âge auront-elles l'année prochaine ? Quel âge aura Isabelle quand Béatrice aura 3 ans, 4 ans ....

Dans la réalité quotidienne, le temps ne s'arrête pas.

Les *cadres* concernés sont la réalité de l'enfant, le cadre numérique et topologique (nombres entiers et intervalles à bornes entières), la représentation algébrique (relation entre l'âge x de Béatrice et celui d'Isabelle) et la représentation graphique sur quadrillage gradué.

Dialectique outil-objet.

Phase a. Les premières questions appellent comme réponse des listes d'âge, en nombres entiers d'années, en correspondance.

L'outil est le suivant : quand il s'est écoulé une année, l'âge des 2 soeurs a augmenté d'un an. Quand il s'est écoulé un temps t, l'âge des deux a augmenté de t. On peut représenter graphiquement les couples d'âges en correspondance sur un quadrillage gradué, du moins certains d'entre eux dans les limites de la feuille, l'unité étant fournie par la maille du quadrillage.

Caractère du graphique : Pour les uns, le graphique ne fait que porter une partie de l'information : ce sont ceux qui reportent les couples d'âge et les désignent par des points du quadrillage.

Dans la mesure où certains couples dépassent les limites de la feuille, le graphique est réducteur.

Pour d'autres, le graphique peut-être producteur ce sont ceux qui prennent en compte l'alignement des points, les relient par un trait.

Phase b. Que veulent dire les traits ? A quoi correspondent les points sur les traits ? Un élève, observant sa représentation, pose la question " et entre 4 et 5 qu'est ce qu'il y a ?"

Réponse d'un autre : "entre 4 et 5 ans, Béatrice a 4 ans et demi".

Implicite : 1) le temps se déroule continuement pour tous. Les difficultés dues au décalage des anniversaires n'ont pas été soulevées ni par le maître, ni par les élèves. Si des élèves avaient soulevé la question, le maître aurait eu à y faire face. La classe aurait été conduite à remettre en cause la différence 5 ans, à ne plus la considérer que comme une valeur approximative, et à distinguer d'une part, le modèle : différence constante, d'autre part, la valeur de la différence.

2) l'accroissement d'âge pour Béatrice et Isabelle est le même en fonction du temps (c'est ce que traduisent les longues listes systématiques que certains élèves écrivent).

Phase c. Explicitation de "entre" dans le cadre numérique : "$y > 4 \quad y < 5$". Tous les points du trait désignent des âges, il y en a que l'on sait désigner.

- Isabelle a 5 ans de plus que Béatrice, Béatrice a 5 ans de moins qu'Isabelle.
- La différence est toujours 5 ans.

Phase d. Institutionnalisation de la formulation algébrique de la correspondance.

$$x \longmapsto y = x + 5 \qquad\qquad y - x = 5$$
$$y \longmapsto x = y - 5$$

Phase e. Décontextualisation.

Exercices et tests dans le cadre algébrique

2/10/76 4/10/76 14/10/76

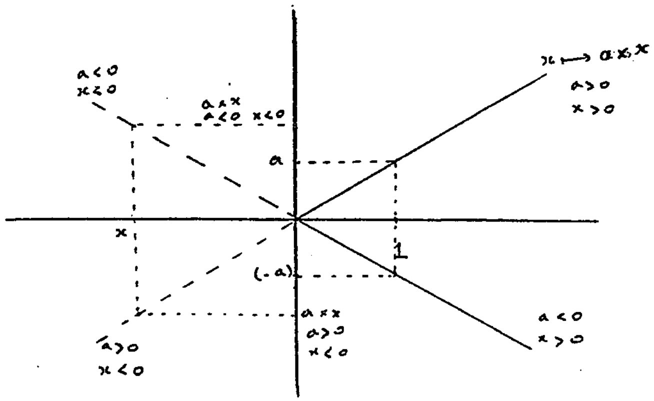
3.3. *Les trois thèmes d'étude qui suivent sont :*

- *Les négatifs* (du 11/10 au 6/11) comme prolongement des entiers connus pour désigner des déplacements orientés sur un axe pointé avec un O.
- *La symétrie* (du 8/11 au 11/1/77) comme transformation géométrique sur papier blanc et sur quadrillage gradué. Dans ce cas, on introduit un codage algébrique du type $(x,y) \xmapsto{M_x} (-x,y)$;

$$(x,y) \xmapsto{M_{xy}} (-x,-y)$$

- *La fonction linéaire* $x \mapsto a \times x$ (du 18/1 au 27/1/77) au sein d'une étude sur la multiplication.

L'intention était de corréler, un jour, ces trois thèmes pour prolonger les opérations aux négatifs de façon que les graphes de $x \mapsto (a \times x)$ restent des droites et que $1 \mapsto a \times 1 = a$ pour $a > o$ ou $a < o$



Remarques.

- Nous n'avons pas dans la progression, mené notre projet d'étude sur les négatifs jusqu'au bout. Nous espérons le reprendre dans le 1er cycle du second degré.

Toutefois, les élèves se sont mis d'accord sur les points suivants :

- le symétrique du symétrique c'est le point lui-même.

$$(x,y) \xmapsto{M_x} (-x,y) \xmapsto{M_x} (-(-x),y)) = (x,y)$$

- Si le point est à gauche, son symétrique est à droite. S'il est à droite, son symétrique est à gauche. Par exemple

  si $x = -3$ $\quad -x = -(-3) = 3$ $\quad -(-x) = -(-(-3))) = -3$ ....

  si $x = 3$ $\quad -x = -3$ $\quad -(-x) = -(-3) = 3$ ....

  c'est la parité du nombre des signes (-) qui compte.

- Nous détaillons ci-après seulement le travail sur la multiplication. Toutefois, nous verrons des résurgences des nombres négatifs en CE 2, à propose de la recherche de 2 nombres dont la somme est donnée. Par ailleurs, les élèves utiliseront la symétrie pour donner une description géométrique du rectangle (cf. travail de la deuxième quinzaine de Novembre 1977).

Fête foraine: les manèges.

La maîtresse est le caissier principal.

1) On joue au seul manège à 2F . M. (la maîtresse) distribue du vrai argent à chacun. Des manèges sont improvisés dans le préau.

2) M. a récupéré l'argent à la fin du jeu précédent. Les clients paient maintenant en inscrivant des sommes sur des papiers.

3) Prévisions de dépenses: les clients se groupent en équipe. Chaque équipe choisit une somme d'argent pour jouer. Elle doit prévoir ses dépenses à chaque manège et envoyer ses prévisions à chaque caissier pour qu'il les contrôle.

Le caissier principal
a au début du jeu
de l'argent et des tickets à 2F, 3F, 5F
(toutes les informations sont affichées.)

au début, les clients ont
de l'argent (reçu de M.)

chaque caissier (un par manège)
a des tickets (reçus de M.)

à la fin, les clients ont
des tickets et moins
d'argent

chaque caissier a moins de
tickets et de l'argent

Chacun fait ses comptes.
Tous les comptes doivent
s'équilibrer, auprès
du caissier principal

En prévision du travail en 3) , les caissiers de manèges constituent une liste "tours-francs", "pour contrôler plus vite".

3.4. *La multiplication.*

Le thème de la multiplication combiné avec ceux de la proportionnalité et de la linéarité ont occupé les mois de décembre et janvier.

Nous décrivons la situation de "la fête foraine" par un diagramme. Par ailleurs, nous accompagnons la présentation des séquences d'apprentissage d'une évaluation faite au fur et à mesure du développement de l'étude. Elle s'appuie sur des épreuves passées le 17/12/76, les 3, 6, 7, 8, 13, 14 et 17 janvier 1977.

Pour les 3 et 17 janvier, nous détaillons les procédures. Dans ces 2 épreuves, les élèves ont à faire des choix pour répondre aux questions posées.

Pour les autres épreuves, constituées de nombreuses petites questions dont chacune comporte une réponse, nous classons les élèves selon les réussites-échecs.

3.4.1. *Apprentissage* (du 9/12 au 13/1/77)

- explicitation de la multiplication (9.10.11 Déc). Travail sur papier quadrillé. On compte les carreaux à l'intérieur de figures dessinées sur papier quadrillé : une irrégulière et un rectangle.

$$\text{notation : } a \times b = \begin{cases} a + a + \ldots + a & b \text{ termes} \\ b + b + \ldots + b & a \text{ termes} \end{cases}$$

- Manège : 2 tours ⟼ 1F, 2 petites pièces d'1/2F.

- Coordination addition-multiplication (du 14 au 17 Déc) dans une situation de communication.
  Le contexte : une fête foraine, des manèges à 5F le tour, 3F le tour, 2F le tour.
  - Voir diagramme ci-contre.

- Test le 17 Déc.
  Il comporte 4 séries de questions. Il y a 15 réponses. Nous donnons par question, le nombre de réponses contenant 0 ou 1 erreur.

15 réponses	Tours 3F	Tours 5F	Addition itérée	table de Pythagore
0 ou 1e	10	10	13	14

. du 3 au 13 janvier : *familiarisation*

- Travail dans le cadre de la représentation : étude de la variation tours $\longmapsto$ francs

3/1/77 individuel. Chacun choisit 2 manèges parmi ceux à 2F, 3F, 4F ou 5F le tour. Il établit pour chacun des listes de couples en correspondance qu"il choisit arbitrairement et les reporte graphiquement.

Résultats : sur 21 travaux

7 font des listes systématiques 1, 2, 3... les autres parcourent les nombres en sautant de façon non monotone.

8 marquent $0 \longmapsto 0$ dans leur liste numérique. Toutefois on ne trouve aucune référence à $0 \longmapsto 0$ dans les listes systématiques mais 13 graphiques passent par l'origine: les 8 plus 5 autres.

Les 8 qui restent : Bastien, Camilo, Frédérique, Jacques, Laurent, Lidia, Sandrine, Yannick reportent leurs points. Laurent et Yannick ne les relient pas, les autres relient les points placés.

12 écrivent les équations de droite sur le graphique ; parmi ceux là, 5 ont une formulation "$x \xrightarrow{\times 3} y$ ou $x \xrightarrow{\times 5} y$" dans la liste.

4/1/77 individuel.

Vous disposez d'une somme d'argent que vous choisissez. Vous choisissez un manège, un nombre de tours. Quelle est la dépense ? Quel est le reste ?

Du 6 au 13. Familiarisation algébrique par exercices écrits.

Test 6/1 5 listes à compléter.

20 élèves	0 ou 1 erreur	de 2 à 4 erreurs
les 4 premières	19	1
les 5 listes	13	7

Test 7/1

	21 élèves n=nombres d'erreurs	1	2 ou 3	n > 3
- nouveau à l'écrit	questions du type $b = 3 \times a$ b donné ou $b = 4 \times a$	17	2	2
- reprise du calcul oral	complet	9	5	7

Test 8/1/77 19 élèves

- nouveau à l'écrit	calcul de a et r	4 non réponses 15 réponses vérifient les égalités 7 sur les 15 donnent r minimum
- reprise du calcul oral	Autres questions	tout juste

Test du 13/1/77 21 élèves

1 élève commet 3 erreurs, 2 élèves 1 erreur, les 19 autres font tout juste.

3.4.2. *Réinvestissement* : problèmes traditionnels de multiplication

4/1/77 - Commande de galettes : vendues par caisses de 6
prix d'une galette 5 F
On passe des commandes, combien coûte chaque commande.
La commande est au choix de l'élève.

3.4.3. *Nouveau problème* : la division euclidienne à l'oeuvre.

17/1/77 - On veut des galettes pour un certain nombre d'enfants. On en distribuera une par enfant. Passer commande pour un nombre d'enfants au choix et pour 159 enfants.

Les procédures.

P_o 4 ne font rien

P_1 1 calcule des multiples de 6 et dérape

P_2 3 écrivent systématiquement la liste :
nombre d'enfants ⟼ nombre de caisses.
de 6 ⟼ 1 à 96 ⟼ 16

P_3 1 cherche à encadrer 159 par des multiples de 6 (6 × 20, 6 × 40, 6 × 17) et s'arrête.

P_4 3 répondent pour 100 par recherche de multiple de 6 et regroupement jusqu'à obtenir 100.

P_5 7 aboutissent à 159 = (26 × 6) + 3 par recherche de multiples de 6 et regroupement des quotients et des restes.

Le 17/1/77.

P_o	Sandrine - Lidia - Mathieu - Jacques	
P_1	Laurent	
P_2	Kamel	Olivia - Virginie répondent pour 100
P_3	Marc	
P_4	Bastien - Frédérique - Isabelle	
P_5	Camilo - Elsa - Gilles - Grégoire - Louison Valérie - Yannick	

- Pour les élèves recourant à P_5, les objectifs d'apprentissage de cette première partie de l'année sont très largement atteints.
- Pour ceux recourant à P_4, Olivia, Virginie et Marc aussi, avec toutefois moins de robustesse.
- Kamel et Laurent ont une connaissance numérique opératoire dans les situations simples, Mathieu - Jacques remplissent à peu près convenablement les tâches algorithmiques (cf. les tests décontextualisés).
- Sandrine commet des erreurs de calculs.
- Pour Lidia, l'écriture des nombres ne représente pas encore une convention d'écriture des groupements. Ce sont des désignations globales.

3.5. *Une autre connaissance du quadrillage.*

3.5.1. *Mesure des longueurs.*

Cette étude est une reprise du CP. Elle concerne une notion qui doit servir d'outil dans le thème suivant : construction d'un quadrillage.

31/1/77. *Consigne 1* : à l'aide d'étiquettes auto-collantes toutes pareilles, fabriquer des bandes. Comparer les longueurs des bandes.

Consigne 2 : Dessiner un trait, envoyer un message à un camarade pour qu'il dessine un trait de même longueur.
matériel : après dessin du trait, avant écriture du message, chaque élève reçoit une baguette de longueur u (la même pour tous) [Dou -Per].

Production des élèves : $\frac{P}{2}$ u, $\frac{P}{4}$ u ... et nombreuses relations.

3.5.2. *Construction du quadrillage du 1/2 au 8/2/77.*

Dans une première étape, seul le cadre géométrique est concerné. Il s'agit de paver la feuille.

1/2/77 Une situation de communication.

DOO phase a : construire sur une feuille blanche un quadrillage.

DOO phase b : Envoyer un message téléphonique sans dessin à un camarade pour qu'il construise le même quadrillage.

DOO phase c : Explicitation des propriétés de la maille des quadrillages utilisés jusqu'ici.

DOO phase d : Pour connaître un rectangle, il faut connaître ses 2 dimensions. Pour un carré, les 2 dimensions sont égales.

Dans une deuxième étape, les cadres géométrique et numérique sont mis en relation par l'intermédiaire de la mesure.

3/2/77 Une situation de communication.
Travail par équipe de 4.
Chacun reçoit une baguette de longueur u

DOO phase a : En se servant de u, construire un quadrillage. Chacun en construit un. Les quatre sont différents dans l'équipe.

DOO phase b : Envoyer une message téléphonique sans dessin à un camarade pour qu'il dessine le même quadrillage. (cf. chronique en annexe).

l'outil adapté est ici la subdivision de u en demi, en quart, tiers, etc....

Emetteur et récepteur comparent leur quadrillage et éventuellement essaient d'expliquer la non-conformité. En cas de difficultés du récepteur, celui-ci renvoie le message avec demande supplémentaire de précisions....

DOO phase c : $\frac{1}{2}$ u , $\frac{1}{4}$ u , $\frac{1}{3}$ u ... sont des longueurs plus petites que u. Mais si on connait u, on les connait aussi.

Dans une troisième étape, le cadre graphique est concerné et mis en relation avec le cadre numérique (graduation du quadrillage, affinement de la graduation) et avec le cadre géométrique (recherche de la distance de 2 points du quadrillage).

Consigne : tracer deux axes, les repérer par des lettres A, B, C....

3.5.3. *Graduation.*

DOO phase a : Choisir 2 points sur une même horizontale ou une même verticale. Quelle est la distance entre ces 2 points ?
Proposition d'élèves : "Si les points sont proches, on compte les carreaux. S'ils sont loin, on est ennuyé" (Olivia)
-"quand on avait des nombres au lieu des lettres, c'était bien, on faisait la différence" (Hélène)
Décision : on numérote les lignes.

DOO phase b : Une situation de communication.

- Choisir 2 points A,B sur l'axe horizontal de son quadrillage.
- Envoyer un message à un camarade pour qu'il place sur son quadrillage 2 points A_1 et B_1 de façon que la distance entre A_1 et B_1 soit la même qu'entre A et B. Le contrôle se fait par comparaison des longueurs des traits AB et A_1 B_1.

Outil implicite : comparer des longueurs revient à comparer les nombres qui les mesurent, à condition d'avoir pris la même unité de mesure.

DOO phase c : Explicitation du rôle de l'unité de mesure.
Le message doit comporter non seulement le "nombre" de carreaux entre A et B, mais aussi la "taille" d'un carreau.
Chacun marque sur les axes de son quadrillage à partir de l'origine, les points obtenus en reportant l'unité u. Chaque point est désigné par un nombre : le nombre d'unités u entre O et ce point.

DOO phase d : Etant donnés 2 points A et B de la graduation, désignés respectivement par les nombres p et q ($q > p$), la distance AB est (q-p) u. La distance de O à A est p u.

Du 4 au 15/2/77. *Graduation de différents quadrillages.*
Un jeu entre le cadre numérique et le cadre géométrique.

4/2/77. *Travail en séance collective.*

Le matériel est constitué par 4 quadrillages que la maîtresse a dessinés sur de grandes feuilles de papier calque. La longueur des mailles est respectivement lu , $\frac{1}{2}$ u , $\frac{1}{4}$ u , $\frac{1}{8}$ u . Le quadrillage Q_u, gradué en nombres entiers est affiché au tableau.

Le quadrillage $Q_{\frac{1}{2}u}$ (lignes de couleur différente du précédent) est posé sur Q_u de manière que les axes soient superposés.

Problème : désigner les points des axes de $Q_{\frac{1}{2}u}$ obtenus par report de $\frac{1}{2}$ u, de manière qu'on puisse comparer les distances entre points sur l'un ou l'autre des quadrillages.

Outil : $\frac{2}{2}$ u = 1 u $\frac{3}{2}$ u = 1u + $\frac{1}{2}$ u ....
nombreuses écritures

3.5.4. *Extension du champ numérique.*

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, ... $\frac{k}{2}$,... désignent des points de l'axe - horizontal ou vertical - la désignation $\frac{k}{2}$ indique que la distance de O au point correspondant à $\frac{k}{2}$ est $\frac{k}{2}$ u = k × $\frac{1}{2}$ u. Comme longueur, $\frac{k}{2}$ u peut avoir beaucoup d'autres écritures. Par exemple $\frac{15}{2}$ u = 7 u + $\frac{1}{2}$ u. Ainsi $\frac{15}{2}$ et 7 + $\frac{1}{2}$ désignent le même point. Quand on prend u comme unité de longueur, $\frac{16}{2}$ et 8 désignent la même mesure.

Exercices Sur le quadrillage $Q_{\frac{1}{2}u}$ gradué en prenant u comme unité de longueur:

. Choisir deux points A et B n'importe où sur la graduation. Calculer la distance AB.

. Choisir un point A et une distance d, trouver B à la distance d de A.

Bilan : On calcule avec les $\frac{p}{2}$ comme avec les entiers ; on les compare, on les additionne, on les soustrait.

Exercice : Etant donnés deux nombres a et b entiers ou de la forme $\frac{p}{2}$ ou de la forme $n + \frac{k}{2}$

- les comparer
- Trouver le nombre qu'il faut ajouter au plus petit pour obtenir un nombre égal au plus grand.

DOO phase 2 : graduation en u de $Q_{\frac{1}{4}}u$, de $Q_{\frac{1}{8}}u$ du 8 au 15/2/77.

Nombreux calculs entre les entiers, les $\frac{p}{2}$, $\frac{p}{4}$, $\frac{p}{8}$.

Problème : Choisir sur son quadrillage 2 points A et B sur une même horizontale ou une même verticale à coordonnées non entières. Envoyer un message à un camarade pour qu'il place sur son quadrillage (pas nécessairement le même) 2 points A_1 , B_1 tels que : distance A B = distance A_1B_1.

Autrement dit, on reprend le problème qui était resté en suspens.
Procédure systématisée : passage par l'entier voisin.

Remarque : Notons que pour certains élèves, c'est le cas de Laurent, le modèle des entiers dicte encore les procédures quand la situation devient complexe. Par exemple sur $Q_{\frac{1}{4}}$ (resp. $Q_{\frac{1}{8}}$, comme sur $Q_{\frac{1}{2}}$) les coordonnées ont une expression en nombres entiers k de quarts (resp. de huitièmes). Les nombres k_i sont utilisés pour calculer la distance entre 2 points (20 pour $20 \times \frac{1}{4}$). Ceci se produit moins quand il s'agit de $Q_{\frac{1}{2}}$.

Bilan : Le champ numérique sur lequel on sait calculer comprend les entiers les $\frac{p}{2}$, $\frac{p}{4}$, $\frac{p}{8}$ qu'on connait. On pouvait en fabriquer d'autres.

Une précision : on sait multiplier les $\frac{p}{2}$, $\frac{p}{4}$, $\frac{p}{8}$ par un nombre entier, car il s'agit d'une addition itérée. On ne sait pas multiplier $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{2}$.

Nous donnons pour mémoire, une information rapide sur les thèmes d'étude qui ont suivi.

3.6. *Durée. Relation distance-durée*

Les mois de Mars-Avril ont été consacrés à l'étude de la notion de durée et des relations entre distances et durées, dans une situation complexe pour les élèves, impliquant plusieurs notions : "la course". C'est une reprise de la course du CP. Les cadres concernés par la situation sont :

- la réalité de l'enfant : les enfants courent sur un parcours déterminé, soit individuellement, soit en course de relais par équipe de 5.

- le cadre physique : on mesure les longueurs de parcours, les durées de course.

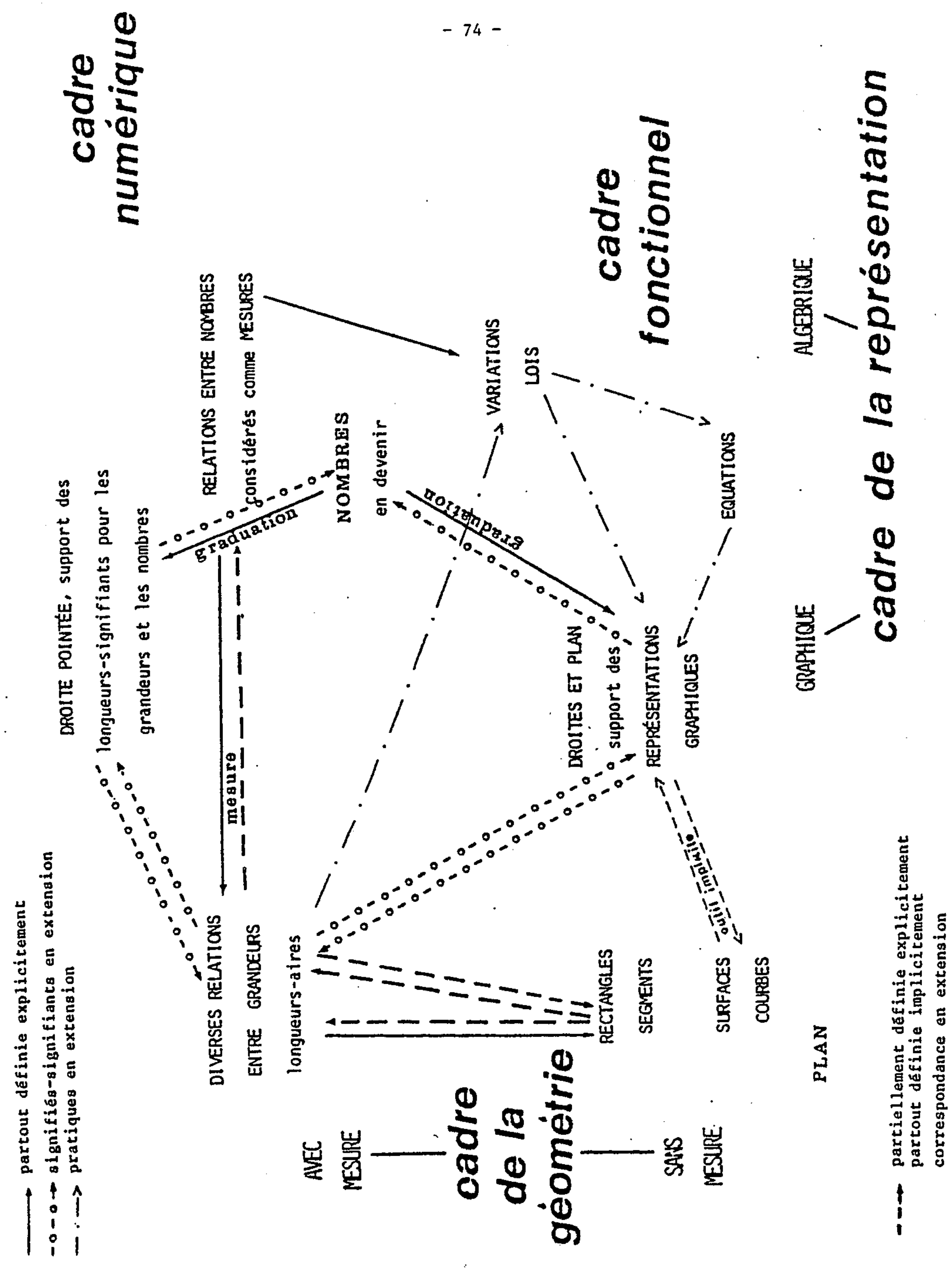
Le rôle des unités de longueur et des unités de temps est objet d'étude, de même que les notions "plus vite, moins vite" "court régulièrement".

- le cadre numérique est sollicité par les mesures
- le cadre graphique intervient pour les représentations du parcours d'une part, pour la représentation des relations entre le temps et la distance parcourue pendant ce temps au sein d'une course d'autre part.

A cette occasion, l'alignement des points sur la représentation a été interprété comme une "régularité" de la course. Par exemple, chaque fois qu'on fait 10 mètres de plus, on met 3 secondes de plus.

3.7. *Retour aux nombres entiers*

Etude des notions de multiples, pratique de la division euclidienne.



4. *Situations d'apprentissage au C.E.2.*
Année scolaire 1977-78.

L'enseignement au C.E.2 s'est organisé autour de trois pôles.

Le premier pôle est marqué par l'étude de situations fonctionnelles issues de la vie quotidienne, axées sur la proportionnalité.

Le deuxième a trait à la mise en route de jeux de cadres et dialectiques pour des problèmes de mesures issus de la géométrie. Pour ces problèmes, nous donnons d'une part la liste chronologique des séquences, d'autre part, pour deux d'entre eux, une présentation en termes de DOO. Nous accompagnons cette présentation du compte rendu d'une séance de travail, le 5/12/77 ; Nous noterons en particulier la diversité des choix des élèves pour répondre à la question posée.

Le troisième marque un retour aux nombres entiers et à l'étude de certaines de leurs propriétés (de certains caractères de divisibilité).

Détaillons.

4.1. Situations fonctionnelles issues de la vie quotidienne.

Le travail s'est déroulé en septembre-Octobre; le contexte est pris dans la vie courante. Le contrôle est assuré d'une part par la recherche de cohérence entre les résultats des élèves, d'autre part par la recherche de cohérence entre les calculs, ou les calculs et les représentations. L'alignement des points dans la représentation exprime, dans les termes de chaque situation, le fait qu'à un accroissement constant de la variable correspond un accroissement constant de la fonction.

Thème : 1) Tarifs de parking 3F de l'heure
relation durée $\longmapsto$ prix
- représentation graphique pour une somme donnée, combien de temps de parking a-t-on.
- Correspondance heures $\longmapsto$ jours

2) Tarifs de taxis
- 3F pour chaque km effectué, 5F de prise en charge
relation distance $\longmapsto$ prix
- Autres exemples en faisant varier les données numériques.

3. Problème : On a beaucoup de déplacements à faire. Les longueurs à parcourir sont très variables. Une compagnie de taxis propose 3 tarifs.

. 1,50 F par km et 4.50 F de prise en charge

. 2 F par km et pas de prise en charge

. Un forfait de 25 F par tranche de 15 km.

Toute tranche entamée doit être payée.

On voudrait à chaque déplacement choisir le plus avantageux.

Comment savoir ?

Commentaire : La notation 1,50F est une notation sociale. Elle n'implique rien sur la connaissance des écritures à virgule pour désigner des nombres décimaux. Elle veut dire 1F et 50 centimes et 2 × 50 centimes = 1 F

La représentation graphique des relations distance ⟶ prix pour chacun des tarifs peut intervenir comme outil de résolution ou au moins de propositions à contrôler par le calcul.

4) Variations et question diverses sur les sujets suivants :

. 13 oeufs à la douzaine, on connait le prix d'une douzaine.

. 6 assiettes pour 2 bols

. 3 pamplemousses pour 5 F

. Les taxis avec de nouvelles valeurs numériques.

. Communications téléphoniques et prix.

Comme on le voit, il s'agit de relations entre des mesures de nature différente. En général, l'étude est numérique dans le sens direct : on peut choisir les valeurs de départ et on a un procédé de calcul pour obtenir les valeurs correspondantes de la fonction. Cette étude donne lieu à des suggestions provenant du graphique, soutenues par une référence à la notion "entre" quand il s'agit de chercher la valeur de départ correspondant à une valeur à l'arrivée comprise entre 2 valeurs prises. Si possible, les suggestions sont contrôlées par le calcul.

4.2. Etude purement graphique dans un jeu emetteur-récepteur.

Il s'agit de se mettre d'accord sur une caractérisation de l'alignement de points sur le graphique.

5/11/77. Consigne : L'émetteur dispose d'un quadrillage gradué. Il choisit un point A sur son quadrillage. Il envoie à un récepteur un message, sans dessin qui doit lui permettre de proposer des points alignés avec O et A.

Indications sur les messages produits.

Ceux-ci sont de 3 formes :

- "le nom de la droite" exemple y = 2 × x

Dans ce cas, le récepteur a donné des valeurs à x, calculé y et fourni des points par leurs coordonnées.

- 2 points donnés par leurs coordonnées : A et un autre.

Dans ce cas, le récepteur a en général proposé des points dont les coordonnées sont des multiples (facteur 2 ou 3) des coordonnées envoyées .

- 1 point : le point A

Dans ce cas, le récepteur a soit joint le point (o,o) à A et s'est retrouvé avec 2 points, soit il a renvoyé le message pour insuffisance d'information avec l'argument "un point, ça fait pas une ligne". L'émetteur a alors rappelé le point O (o,o).

Nous n'analysons pas cette situation, par ailleurs très intéressante, C'est pourquoi nous ne parlons pas des procédures d'échecs, qui ont donné lieu à aller-retour de messages et discussion au bilan.

Toute la classe s'est mise d'accord sur les points suivants :

- quand on a le "nom" de la droite (y = a × x) on peut trouver tous les points

- quand on a un point connu par ses coordonnées (a,b), les points (n × a, n × b) sont alignés avec (o,o) et (a,b)

4.3. Etude géométrique du rectangle.

Séances des 8 - 10 et 15/11 : nous en présentons une chronique résumée.

le 8/11 : DOO phase a.

Consigne. Dessiner un rectangle sur une feuille blanche. Envoyer un message à un camarade pour qu'il dessine sur sa feuille le même rectangle.

Procédures.

- le rectangle est caractérisé par les longueurs des côtés. Les côtés opposés ont la même longueur.

- Pour éviter les difficultés de construction d'angle droit, un choix est souvent adopté : le rectangle a ses côtés parallèles (à l'oeil) aux bords de la feuille. Deux sommets étant choisis, fixés, les autres sont un peu déplacés pour tenir compte de l'exigence sur les longueurs des côtés.

DOO phase b. en séance collective.

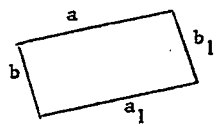
A partir du compte rendu des élèves et des caractères retenus pour décrire le rectangle, la maîtresse fournit des contre-exemples.

Olivia :"les côtés qui sont en face, il faut qu'ils soient pareils"

M :

Bastien :"non, c'est de travers il faut qu'ils soient droits"

M :



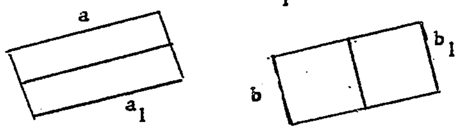
Bastien :"en se penchant, c'est droit"

Olivia :"$a = a_1$ $b = b_1$ ça va."

Un *élément contingent* : Bastien recourt à la *symétrie* pour caractériser le rectangle. (cf.CE 1)

Bastien : c'est comme dans un miroir, a_1 doit être le reflet de a et b_1 le reflet de b

Il dessine



Il ajoute : "Ce qui fait le rectangle, c'est le demi-rectangle reflété dans le miroir". (Il est implicite qu'il s'agit de symétrie droite). La classe recherche les axes de symétrie du rectangle.

De la recherche précédente, il ressort les points suivants :

- On peut plier le rectangle de manière que a vienne sur a_1, que les sommets viennent l'un sur l'autre.
- On peut plier le rectangle dans l'autre sens de manière que b vienne sur b_1.
- Quand on plie dans un sens puis dans l'autre on obtient 4 petits rectangles qui se superposent, "les 4 sommets du grand rectangle se superposent" (déclaration de Frédéric).

Ceci ne se passe pas pour la 1ère figure proposée par la maîtresse.

- Le rectangle a 2 miroirs.

Précision de Bastien : "si je mets la pointe du compas au milieu du rectangle, il passe par les 4 coins du rectangle."

Les séances des 10 et 15 Novembre ont pour but de tester la disponibilité des propriétés de symétrie comme outil de construction d'un rectangle et de solliciter leur formulation dans une situation de communication.

le 10/11 : même consigne que le 8 en fournissant aux élèves une feuille à bords arrondis irrégulièrement pour bloquer la procédure de construction des côtés parallèlement aux bords de la feuille.

Remarque. Certains ont fixé la feuille sur la table et se sont servi des bords de la table comme guide pour les côtés de leur rectangle.
D'autres font appel au double pliage.

le 15/11 : Chaque élève reçoit une feuille blanche sur laquelle sont marqués un point A et un trait (la même feuille pour tous).

Consigne : Dessiner un rectangle dont l'un des sommets est A et pour lequel le trait dessiné est un axe de symétrie.

. Envoyer un message à un camarade pour qu'il reproduise sur sa feuille (contenant aussi un point et un trait comme celle de l'émetteur) le même rectangle avec les mêmes exigences (l'un des sommets est le point, le trait est axe de symétrie).

Chronique (*) :

Le travail individuel comporte 3 phases : construction - rédaction du message - réception d'un message (interprétation-construction d'une figure qui correspond).

1 Construction d'un rectangle à partir des éléments donnés.

La procédure majoritaire est la suivante :

On commence par tracer A_1 le symétrique du point donné, par rapport à l'axe de symétrie donné, et le côté AA_1 - la plupart d'entre eux marquent A_1 en pliant leur feuille le long de l'axe de symétrie et en prenant le reflet de A. Deux d'entre eux reportent la distance de A à l'axe de l'autre côté de l'axe sur une droite perpendiculaire à l'axe passant par A. Toutefois, ici, la direction est évaluée à l'oeil et le pliage sert alors de vérification. Pour compléter le dessin du rectangle, on a deux attitudes constructives, dont l'une moins fréquemment adoptée, mène plus difficilement à l'achèvement de la figure et est même parfois abandonnée en cours de route au profit de l'autre.

La première méthode consiste à tracer une parallèle à l'axe de symétrie et passant par A. Sur 4 élèves ayant adopté cette méthode, l'un l'aban-

* Cette chronique a été rédigée par Claudine Dubin.

donne ensuite pour utiliser la seconde démarche, l'un d'entre eux avait au préalable tracé une parallèle au segment AA_1, il a donc obtenu la moitié du rectangle. Il lui restait à compléter son dessin par symétrie par rapport à l'axe donné. L'écueil de cette méthode réside dans le fait que les 4 élèves ont tracé leur parallèle à "vu de nez" sans faire de vérification. L'imprécision du dessin les fait aboutir à la fin à une figure qui s'éloigne sensiblement du rectangle. Par ailleurs, il semble que le fait de ne pas obtenir immédiatement un troisième sommet du rectangle et d'être obligé de le choisir arbitrairement sur cette droite constitue pour eux une gêne qui les pousse à abandonner cette construction. Trois autres élèves évitent cet écueil en reportant la mesure de A à l'axe de symétrie, mais sans construire effectivement la parallèle à l'axe de symétrie.

La seconde démarche adoptée par 9 élèves leur permet d'aller jusqu'au bout de la construction du rectangle. Ils cherchent le deuxième axe de symétrie en repliant le premier axe sur lui-même. Le "reflet" des points A et A_1 leur donne immédiatement les 2 autres sommets B et B_1. Il ne reste plus alors qu'à tracer les côtés du rectangle. Personne apparemment n'a été gêné par l'arbitraire de l'emplacement du second axe de symétrie sauf Gilles qui a cru le lever en reportant sur le premier axe donné la mesure de A à cet axe. Il s'est aperçu ensuite qu'il avait obtenu un carré, cela ne l'a pas gêné. Il a alors vérifié que son carré était bien un rectangle en faisant se superposer les côtés opposés.

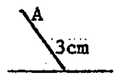
Enfin un élève a tracé d'abord une parallèle au côté AA_1 puis a effacé et est revenu à la première démarche.

Si cette première phase n'a pas posé de grand problème, il n'en a pas été de même pour la rédaction des messages.

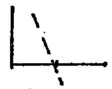
2) La plupart des messages ne respectent pas entièrement le point de départ donné par la consigne, ils disent de "tracer un axe de symétrie" puis donnent la mesure des côtés (ou la mesure des demi-côtés) en précisant : horizontal, vertical (ou encore longueur, largeur), l'axe de symétrie servant implicitement à déterminer l'horizontale (ou fixant "le sens" du rectangle - la longueur étant prise le long de l'axe de symétrie). Certains messages contiennent des indications sur la longueur de l'axe de symétrie (voire même des axes de symétrie), mais celles-ci sont sans rapport avec les mesures des côtés du rectangle. Un seul message, celui d'Olivia, arrive à peu près à préciser suffisamment les données tout en respectant la consigne de départ : "tu prends un axe incliné de longueur 9 cm. Pour AA_1 en partant de l'axe c'est 1,6cm. Pour BB_1 c'est 5cm".

3) Nous ne relaterons pas ici la réception des messages.

DOO <u>phase</u> c : la séance collective permet de critiquer les messages. Tous sont d'accord pour dire que le message doit dire de tracer l'axe de symétrie, doit préciser la distance de A à l'axe ainsi que la distance de A à B. (sous-entendu à prendre parallèlement à l'axe de symétrie). Si on connaît la distance de A à l'axe, on connaît le côté AA_1, c'est le double", la maîtresse fait préciser la mesure de A à l'axe en traçant au tableau :



les élèves refusent ce dessin et précisent
"il faut que ce soit droit"
Les notions de côtés horizontal et vertical sont critiqués par les élèves :
"on n'a pas dit que l'axe était horizontal"
un message évitait ce problème en disant :
"tu mets ta feuille horizontal, tu mesures en horizontal 7cm, vertical 5cm, tu reflètes".
La discussion permet alors de préciser la façon de placer l'axe de symétrie pour obtenir tout le rectangle. L'expression utilisée est "au milieu".

La maîtresse trace : 

les élèves refusent le dessin et finalement proposent de placer l'axe de symétrie horizontal, au milieu du côté vertical.

En fin de séance la maîtresse introduit la notion d'angle droit qui semblait manquer aux enfants au cours de la séance pour s'exprimer. L'angle droit est vu comme un quart de tour. Enfin un élève, Frédéric fait remarquer au cours de la discussion que si on a donné l'axe de symétrie et la distance du point A à l'axe en pliant en quatre, le reflet du point A donne les 4 sommets du rectangle. Les autres ajoutent alors qu'on a 4 rectangles qui se superposent chacun est le quart du rectangle cherché.

DOO <u>phase</u> d : Institutionnalisation des symétries du rectangle.

4.4. *Rectangles et mesures.*
- dimensions, périmètre, aire.

Pendant trois mois, de la mi-novembre à la mi-février, les élèves travaillent sur des relations entre dimensions, périmètre et aire de rectangles.

Dans les problèmes proposés interagissent le cadre géométrique, le cadre numérique et le cadre de la représentation sous ses 2 formes : algébrique et graphique. Le cadre fonctionnel intervient comme outil en relais du cadre matériel.

Nous exposons ci-après la liste chronologique des consignes telles qu'elles ont été données aux élèves et non modifiées comme nous la proposerions maintenant (et qui intègre en particulier du travail sur la notion d'aire indépendamment de la mesure)

4.4.1. *Rectangles* : Connaissance du matériel - des critères de classification.

17/11/77 : Travail par équipe de 4. Chacune découpe 4 ou 5 rectangles sur du papier quadrillé.

L'équipe choisit un critère pour repérer ses rectangles et les classe selon ce critère.

. Comparaison des divers critères retenus

- selon le nombre de carreaux à l'intérieur
- selon une dimension
- selon la somme des dimensions

. Organisation d'une même collection de rectangles selon les 3 critères. Nécessité de désigner les rectangles pour formuler les classes. Elles ne coïncident pas.

21/11/77 : On veut classer des rectangles selon le périmètre et selon la somme des 2 dimensions.

Travail par 2 équipes émettrice-réceptrice.

Chacune dispose d'une collection de rectangles et envoie un message à l'autre sans dessin, pour qu'elle puisse classer, selon le périmètre l'ensemble des 2 collections de rectangles.

Bilan : . La somme des 2 dimensions, c'est le demi-périmètre. Il revient au même de classer selon la demi-périmètre ou selon le périmètre. La connaissance de l'une des informations (périmètre ou demi-périmètre) détermine l'autre.

. Beaucoup de rectangles ont même périmètre.

22/11/77. Récit de la séquence du 21.

4.4.2. *Recherche de rectangles* dont le périmètre est fixé

DOO phase a : *Consigne* : dessiner des rectangles tels que le périmètre soit 16cm.

Pour les élèves, le problème revient à chercher des rectangles dont la somme des dimensions soit égale à 8cm ; ou encore, cherche 2 nombres a et b tels que $a + b = 8$.

DOO phase b : Les solutions entières de $a + b = 8$ sont vite épuisées. On observe ce jour là une voie de sortie : le recours aux fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ etc.... ou le recours aux mm comme subdivision du cm, ce qui a du sens du point de vue de la désignation des mesures de longueurs.

Dans les séquences suivantes, (25-28/11) la relation a+b = constante est reprise avec d'autres valeurs de la constante :

$i + r = 2$ $\qquad$ $i + r = 6$ .... .

Là, on observe une autre voie de sortie sous forme d'entiers négatifs (une résurgence de l'année précédente). Jacques en particulier ne mentionne aucune fraction mais plusieurs solutions comprenant un entier négatif alors que l'année précédente, il n'avait pas témoigné d'aisance à leur égard.

La procédure en général utilisée pour engendrer des couples (i,r) convenables consiste à partir d'une solution, à travailler par compensation : on augmente l'une des valeurs et on diminue l'autre d'autant. C'est en particulier ce qui conduit à des négatifs.

Ceux qui proposent des solutions fractionnaires emploient plutôt une autre procédure. Ils diminuent la constante k de 1 qu'ils partagent en $\frac{p}{n}$ et $\frac{q}{n}$ avec $p + q = n$. A partir d'un couple (i,r) répondant à $i + r = k-1$, ils fabriquent des couples de la forme $(i + \frac{p}{n}, r + \frac{q}{n})$.

Elsa remarque que dans $i+r = 2$ pour un choix de r, i est le complément à 2. Elle propose la méthode suivante : on choisit r, on calcule $i = 2-r$. Pour les autres valeurs de la constante, on fait "pareil".

Les élèves se partagent en 2 catégories : ceux pour qui $i+r = k$, $r = k-i$, $i = k-r$ sont trois manières d'écrire la même relation entre i et r ; ceux qui ne sont pas convaincus.

Consigne : la classe est partagée en 3 groupes. Chacun s'occupe de chercher des couples (i,r) tels que

$i + r = 8$ pour un groupe

$r = 8 - i$ pour un autre groupe

$i = 8 - r$ pour le 3ème groupe

On représentera graphiquement les couples et on comparera les graphiques. En fait, les expressions $r = 8-i$ et $i = 8-r$ perturbent plusieurs élèves et la représentation graphique ne leur apporte aucun contrôle de leurs listes numériques, elle reste un cadre étranger (cf. évaluation).

DOO phase c et d : compte rendu et bilan de la séance du 22/11.

Pour $i + r = \ell$ fixé, il y a peu de rectangles dont les dimensions s'expriment en nombres entiers, mais il y en a une infinité dont les dimensions sont fractionnaires.

Remarque : le statut des nombres négatifs vis à vis de la mesure est ambigu. Jacques ou Kamel par exemple calculent avec les entiers négatifs comme avec les entiers positifs, même si la technique est quelquefois défaillante. Ils ont identifié le problème de recherche de rectangles à demi-périmètre fixé à la recherche de 2 nombres dont la somme est donnée et ne prennent pas en compte la question de la signification des solutions dans le cadre géométrique. Il y a pour eux changement de cadre.

DOO phase e : chercher des couples de nombres fractionnaires (i,r) dont la somme i+r est fixée à l'avance.

4.4.3. *Aire des rectangles.*

4.4.3.1. *Relation longueur-aire*

Consigne : Choisir et découper des rectangles dans du papier quadrillé. Calculer le demi-périmètre et l'aire. L'unité de longueur est la longueur de la maille du quadrillage, l'unité d'aire est la maille.

DOO phase a : les dimensions sont entières

DOO phase b : les dimensions sont fractionnaires.
(cf. compte rendu du 5/12 dans l'évaluation IV A 5,6).

8/12/77 : Le matériel est toujours constitué de rectangles. On fixe une dimension a, on fait varier l'autre b.

DOO phase c : Calculer le demi-périmètre p, le périmètre P, l'aire A.
Reporter graphiquement les couples (b,p) (b,P) (b,A).

Pour répondre à cette consigne, les élèves découpent quelques rectangles et surtout travaillent dans le cadre numérique.

Ce travail représente une manipulation des relations $b \longmapsto a + b$ et $b \longmapsto a \times b$ dans le cadre numérique et le cadre fonctionnel en extension et en relais de la réalité matérielle qui leur a donné leur sens.

4.4.3.2. *Extension de la multiplication.*

DOO phase b, c, d : 8-9/12/77 (cf.détail IV A 7,8)

Mise au point d'une méthode pour calculer le produit de 2 fractions en interaction avec l'interprétation "aire de rectangle".
Nombreux calculs.

4.4.4. *Familiarisation dans le cadre numérique* : DOO phase e.

12/12/77 : Etude de quelques correspondances $x \longmapsto y = a \times 2$ pour a fixé entier ou fractionnaire, par exemple

$$a = \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad a = \frac{3}{5}$$

. Problème : connaissant y, trouver x tel que $a \times x = y$

En pratique, ce problème est résolu pour a entier ou inverse d'entier. La question se pose pour $a = \frac{3}{5}$. Elle donne lieu à une discussion collective où $\frac{3}{5} = 3 \times \frac{1}{5}$ joue un rôle important.

13/12/77 : Reprise des graphiques

$x \longmapsto \ell = a + x$ pour traduire des demi-périmètres de rectangles

$x \longmapsto y = a \times x$ pour traduire des aires de rectangles

a est fixé = $\frac{13}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{3}{4}$, 7 , $\frac{4}{3}$

Travail en équipe de 4.
Chacun dans l'équipe choisit une valeur différente de a.
Les valeurs de x sont choisies par les élèves, entières et/ou fractionnaires selon les élèves.

Exemple : pour $a = \frac{4}{3}$, $x = \frac{28}{13}$

Problème : Calculer $\frac{4}{3} + \frac{28}{13}$ et $\frac{4}{3} \times \frac{28}{13}$.

Les 4 élèves d'une équipe construisent leurs graphiques des périmètres sur un même quadrillage gradué, et les graphiques des aires sur un autre quadrillage gradué.

Bilan : Comparaison des graphiques,
Comparaison des relations $x \longmapsto a + x$
$x \longmapsto a \times x$

4.4.5. *Additivité des aires.*

15/12/77 : Travail en équipe.

On met en commun tous les rectangles notés par les différents membres de l'équipe, le 13. On en choisit 2, R_1 et R_2, on essaie par recollement bord à bord de constituer un nouveau rectangle R.

- Si on y parvient on calcule le demi-périmètre et l'aire de R et on note ses dimensions.
- Si on n'y parvient pas, on en cherche la raison.

Consigne : dans ce cas, construire un rectangle R_3 tel que, en recollant bord à bord R_1, R_2, R_3, on obtienne un nouveau rectangle. Quelle est son aire ?

- A quelle condition peut-on en recollant bord à bord 2 rectangles R_1 et R_2 obtenir un nouveau rectangle R. Quelles relations y a-t-il entre les dimensions de R_1, R_2, R ; entre les aires.

10/1/78 : Calcul mental sur la proportionnalité à partir des achats du réveillon.

. On dispose d'un rectangle R de dimension (a,b), d'un rectangle R_1 de dimensions $(2 \times a\ ,\ 3 \times b)$. Peut-on paver R_1 avec R. Quelle relation y a-t-il entre l'aire $A(R_1)$ et l'aire A(R).
Même question avec S_1 de dimension $(\frac{1}{10} \times a\ ,\ \frac{1}{10} \times b)$.

12/1/78.1)Calcul mental à propos de périmètre et aire de rectangles dont on donne les dimensions $(\frac{2}{10}\ ,\ \frac{1}{5})$; $(\frac{1}{15}\ ,\ \frac{1}{10})$; $(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{8})$; $(\frac{1}{9}\ ;\ \frac{2}{5})$

. Rappel de la séance précédente

4.4.6. Rectangles d'aire fixée.

12/1/78.2)*Consigne* : Rechercher des rectangles d'aire 24.

. Représentation graphique de couples (a,b) tels que $a \times b = 24$.
- les points à coordonnées entières sont repérés immédiatement.

Bilan : - un rectangle donne 2 couples (a,b) et (b,a) symétriques par rapport à la diagonale.
- à partir d'un couple (a,b) tel que $a \times b = 24$ on en fabrique beaucoup :

$(\frac{1}{10}\ ,\ 240)$; $(\frac{1}{2}\ ,\ 48)$; $(\frac{1}{4}\ ,\ 96)$; $(\frac{1}{12}\ ,\ 288)$; $(\frac{1}{3}\ ,\ 72)$; $(\frac{3}{10}\ ,\ 80)$...

17/1/78 : Reprise de la recherche de rectangles d'aire 24.

DOO phase e : Une méthode est formulée pour en trouver beaucoup à partir d'un qui convient : si un côté est x fois plus grand, l'autre est x fois plus petit.

Problème : à partir de $(72, \frac{1}{3})$ on obtient
$(72 \times 1000, \frac{1/3}{1000})$. Qu'est $\frac{1/3}{1000}$?

Le problème est posé à toute la classe.
Louison répond :"c'est $\frac{1}{3}$ divisé par 1000, 3000 petites parties dans l'unité c'est $\frac{1}{3000}$."
Bastien :"et $\frac{1/1000}{3}$ "

Remarque sur la courbe des couples (a,b) tels que $a \times b = 24$

Hélène : "Ça descend vers l'axe, ça se rapproche de plus en plus, mais ça ne touchera jamais parce que $o \times x = o$, jamais 24."

4.4.7. Régionnement.

19/1/78 : Coloriage du quadrillage (1er quadrant) en 3 couleurs selon la règle suivante (une unité d'aire étant choisie, on identifie l'aire à sa mesure).

Un point de coordonnée (a,b) sur le quadrillage représente un rectangle R de dimension (a,b). On compare son aire A(R) à une valeur k fixée. On choisit k = 25.

Si $A(R) < 25$ on marque (a,b) par un point bleu
Si $A(R) > 25$ on marque (a,b) par un point rouge
Si $A(R) = 25$ on marque (a,b) par un point noir

Y a-t-il un carré parmi les rectangles ?

23/1/78 : Reprise du coloriage du quadrillage pour k = 9

- Nouveau coloriage du quadrillage selon la même consigne avec une valeur de k différente par équipe : k = 15, 16, 36, 27, 49, 20.

- Recherche de procédés rapides de coloriage.

4.5. Recherche d'un carré d'aire donnée.
Introduction de l'écriture décimale.

4.5.1. Problème : Rechercher un carré d'aire 27.

7/2/78 : A défaut, s'en rapprocher le plus possible. (cf. 4.8 et transcript).

Dans la semaine du 9 au 16 Février.

. Rappel des séquences précédentes pour des absents.

4.5.2. Familiarisation par de nombreux calculs avec l'écriture décimale.

4.6. Echelle, linéarité, proportionalité.

Ce sont les outils adaptés pour l'agrandissement ou la réduction de puzzles. La situation est empruntée à G.Brousseau, Toutefois, elle reçoit quelques modifications.

Consigne : Voici un puzzle de 6 pièces (chaque pièce a une forme géométrique simple).

M : On veut changer la taille des pièces sans changer la forme de façon à refaire un puzzle. On veut fabriquer 4 puzzles : un violet, un jaune, un bleu et un rose. Chacun fabrique 1 pièce. On rassemblera ensuite les pièces pour former le puzzle. Il y a 4 puzzles, 4 équipes de travail.

La consigne est la suivante :

Un côté d'une pièce de mon puzzle mesure 12,5cm.

Pour les violets, ce côté doit mesurer 25 cm
Pour les jaunes, ce côté doit mesurer 10 cm
Pour les bleus, ce côté doit mesurer 20 cm
Pour les roses, ce côté doit mesurer 6,25 cm

Construisez les pièces.

COMMENTAIRES.

Ce travail occupe plusieurs séances au cours desquelles le cadre fonctionnel est sollicité pour répondre à des questions sur la relation entre longueurs qui se correspondent, entre aires de pièces qui se correspondent dans un agrandissement choisi.

Le puzzle violet est très vite construit en doublant toutes les mesures. Les responsables de ce puzzle recourent à une procédure "fonction" sans la moindre hésitation. Pour le puzzle rose, 3 élèves fournissent vite leurs pièces en divisant par 2 les mesures, 3 autres rencontrent des difficultés. Le puzzle jaune et le bleu posent problème à un certain nombre des élèves impliqués. Le modèle $a \longmapsto a - 2{,}5$ est par exemple mis en oeuvre dans le puzzle jaune. Il est rejeté parce qu'il ne produit pas la forme attendue. Une procédure de type " Scalaire" est alors sollicitée.

Ainsi, le choix de la procédure (type "scalaire" ou type "fonction") dépend aussi du caractère des relations numériques en jeu.

4.7. Description de la dialectique outil-objet à propos du problème :*

Recherche de l'aire de rectangles dont le périmètre est donné.

DOO phase a : Recherche de rectangles dont le périmètre est 16 cm.

---

* développée par la classe.

1). Un rectangle dessiné sur du papier a un intérieur et un bord, le périmètre est la longueur du bord. L'aire évalue l'intérieur.

Si le rectangle est dessiné sur papier quadrillé, l'unité de longueur est la longueur d'un côté de la maille et l'unité d'aire est l'aire de la maille.

. Si le dessin du rectangle suit les lignes du quadrillage, suivant a côtés de mailles dans un sens et b dans l'autre, on sait mesurer son bord : 2a + 2b, et son aire $a \times b$.

. $2a + 2b = 16 \Leftrightarrow a + b = 8$

. On épuise les couples d'entiers. Mais aussi : on choisit

$a \longmapsto 2 \times a \longmapsto 16 - (2 \times a)$ le résultat divisé par 2 c'est b, on vérifie.

On veut d'autres rectangles

2) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ sont des mesures de longueur. Si les longueurs sont mesurées en unités u, $\frac{1}{2}$ est la mesure de la longueur v telle que

$v + v = 2v = u.$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$

de même $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 4 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

et aussi $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$ $\quad 2 \times \frac{2}{4} = 1$ $\quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ etc...

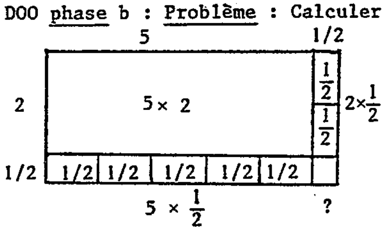
et aussi d'autres petites fractions.

ici $a = 7 + \frac{1}{2}$ $\qquad b = \frac{1}{2}$

$a = 7 + \frac{1}{4}$ $\qquad b = \frac{3}{4}$

$a = 5 + \frac{1}{2}$ $\qquad b = 2 + \frac{1}{2}$

DOO phase b : Problème : Calculer l'aire



$5 \times 2 = 10$

$2 \times \frac{1}{2} = 1$

$5 \times \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$

Il reste un petit carreau ?

- La stratégie ne fonctionne plus.

Jusqu'ici, le moyen de déterminer l'aire était le pavage avec un certain nombre n de mailles unitaires et la détermination de n.

. Dans le problème ci-dessus, on a compté les 1/2 carreaux : 2 demi-carreaux valent 1 carreau. Ca se voit sur le dessin.

. Pour le petit carreau restant, on ne voit rien. Et pas question de le paver avec des mailles unitaires.

. Extension d'une procédure connue à une situation nouvelle.
Dans le registre des longueurs, on a mesuré des longueurs $v < u$ en les reportant dans u. Quand le report tombait juste $v + ... + v = nv = u$ on avait $v = \frac{1}{n} u$.

Ici pour évaluer l'aire du petit carreau, on essaie de paver avec des copies c de ce petit carreau, la maille unitaire. Il en faut 4. L'aire de chacune est $\frac{1}{4}$. L'outil implicite ou explicite selon les élèves ici est $4 \times x = 1$ d'où $x = \frac{1}{4}$, quelle que soit la réalisation de x. Ceux qui n'en disposent pas, ne peuvent conclure par une réponse exacte.
Ils peuvent encore répondre : un peu plus de 13 et demi.
Ici le bilan collectif remplit le rôle de diffuseur des idées et aussi participe à l'évolution des conceptions.

. Conclusion pour l'aire du rectangle.

$$(5 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}) \xmapsto{\text{aire}} 10 + 1 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 13 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 13 + \frac{3}{4}$$

c) Nouveau explicite.

On a pu déterminer l'aire du rectangle en ayant seulement une information sur les longueurs des côtés, comme pour les dimensions entières.

Prolongement de la multiplication.

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \longmapsto \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$(5 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}) \longmapsto (5 + \frac{1}{2}) \times (2 + \frac{1}{2}) = (5 \times 2) + (5 \times \frac{1}{2}) + (2 \times \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2})$$

$$(6 + \frac{1}{2}, 3 + 3/4) \longmapsto (6 \times 3) + (6 \times \frac{3}{4}) + (\frac{1}{2} \times 3) + (\frac{1}{2} \times \frac{3}{4})$$

d) Institutionnalisation

Pour des mesures entières ou fractionnaires, et des unités de mesure de longueur et aire adaptées, l'aire d'un rectangle de dimension (a,b) est le produit des dimensions.

e) Familiarisation. Renforcement.

- Des problèmes du même type, où on fait varier la valeur du demi-périmètre.
- Etude de la variation de l'aire d'un rectangle dont on fixe 1 dimension.

A ce propos, étant donnée une mesure d'aire, est-elle l'aire d'un rectangle de la famille ?

4.8. Dialectique outil-objet - à propos du problème suivant posé en CE2*

Soit n = 25. On se donne une unité de longueur et une unité d'aire adaptée, un quadrillage gradué Q. On décide que chaque point M de Q de coordonnées (a,b) représente un rectangle R(a,b) de dimension (a,b). Colorier le quadrillage en attribuant à M la couleur

rouge si Aire $R_{a,b} > 25$
bleu si Aire $R_{a,b} < 25$
noir si Aire $R_{a,b} = 25$

DOO phase a : un critère possible :

1) on choisit un point M, on lit ses coordonnées
on calcule $a \times b$ on compare à 25
- La procédure est trop longue pour le nombre de points qu'il y a à colorier (plus de 1000 points)

2) $5 \times 5 = 25$ point noir
au dessus rouge
au dessous bleu

L'outil implicite qui sert tout le temps est la compatibilité de l'ordre et de la multiplication.

En réfléchissant, au besoin en faisant jouer la communication dans la classe en phase collective, on arrive à progresser et colorier de grandes zones :

* production des élèves.

le coin en haut à droite d'un point rouge est rouge
le coin en bas à gauche d'un point bleu est bleu.
Ces deux coins peuvent se toucher en un point noir.

Phase b) Où sont les points noirs, y en a-t-il beaucoup ?

Certains élèves recourent pour cela à un principe de valeurs intermédiaires (VI)

- au dessus d'un rouge c'est rouge
- au dessous d'un bleu c'est bleu

Sur une droite verticale, entre un rouge et un bleu il y a un noir. Il faut rétrécir l'espace entre un rouge et un bleu.

. L'outil implicite ici est que l'application $x \longmapsto a \times x$ (pour a abscisse de la droite) est continue et que toute valeur entre 2 autres fixées est prise, en particulier 25.

Les élèves qui recourent à l'argument VI ont une conception géométrique des nombres :
ils transfèrent implicitement au cadre numérique, le continu géométrique. C'est par exemple le cas de Bastien. Cet outil fonctionne longtemps avant d'être explicité. C'est l'existence de l'ensemble des réels qui est concerné.

DOO phase c : reprise du problème en diversifiant les valeurs de n pour chaque équipe. On explicite les effets de (VI). Prenons n = 27.

. Les points noirs correspondent aux couples (a,b) tels que $a \times b = 27$. Cela on le savait.

. Pour chaque choix de a, on a $b = \frac{27}{a}$.

DOO phase d : institutionnalisation

$\frac{27}{a}$ est le nombre qui multiplié par a est égal à 27. En termes de longueur et aire, $\frac{27}{a}$ mesure le côté d'un rectangle dont l'autre a pour mesure a et dont l'aire (pour une unité adaptée à l'unité de longueur) mesure 27.

Pour placer le point $(a, \frac{27}{a})$ sur le quadrillage l'écriture $\frac{27}{a}$ ne dit rien. Il faudrait situer $\frac{27}{a}$ dans un intervalle aussi petit que possible et dont on sache désigner les bornes commodément vis à vis de la graduation. La tâche est plus ou moins facile selon les valeurs de a ; pour a = 2, 3, 5, 10 c'est possible. Pour a = 7, on choisit une valeur proche de $\frac{27}{7}$, par exemple 4. On peut améliorer cette valeur. Si a est fractionnaire, la question n'est pas résolue.

Nouveau problème : DOO phase b

Parmi ces rectangles, y a-t-il un carré ?

Il faudrait trouver a tel que $a \times a = 27$ ou encore $a = \frac{27}{a}$.

(cf. Conceptions des élèves, IV C2).

Problème : Comment choisir a ?

Une proposition : $5 \times 5 = 25$ $6 \times 6 = 36$

a est entre 5 et 6.

Nouvelle situation :

. On cherchait une valeur, on trouve une fourchette, c'est à dire un couple de nombres.

. Dans les problèmes antérieurs, on avait traité des nombres, on est ici confronté à des couples de nombres.

. Le problème est de déterminer une stratégie permettant, chaque fois qu'on a une fourchette $[u_n , v_n]$ d'en obtenir une meilleure $[u_{n+1} , v_{n+1}]$.

Plusieurs possibilités se présentent selon les connaissances de celui qui cherche. Elles mènent à des suites $[u_n , v_n]$ différentes. Elles utilisent toutes, la propriété pour une fonction continue d'envoyer un intervalle sur un intervalle.

L'outil implicite, pour nos élèves, est la fonction continue $a \longmapsto a^2$, "l'image d'un intervalle est un intervalle" est pour eux, un théorème en acte.

Phase c) Ce qui va être explicité c'est un choix adapté, économique pour les calculs, des intervalles $[u_n , v_n]$ contenant a. On va choisir u_n et v_n fractions décimales.

Phase d) On institutionnalise une écriture commode pour les calculs, socialement reconnue, de ces fractions décimales : l'écriture à virgule.

Les règles de calcul sont celles des entiers, accompagnées des règles d'usage de la virgule pour traduire l'intervention des fractions décimales.

Signifiés - Signifiant

Dans ce problème, les points du quadrillage constituent un signifiant pour des signifiés différents : les rectangles et les couples de nombres.

Le jeu de cadres a permis de donner une signification au quotient $\frac{x}{y}$ de 2 nombres, qu'il soient entiers ou fractionnaires : $\frac{x}{y}$ mesure un des côtés d'un rectangle dont l'autre côté mesure y et dont l'aire a pour mesure x.

La multiplication est ainsi étendue à tous les nombres qui désignent des mesures de longueur.

Changement de cadre.

La représentation graphique des informations obtenues dans la première partie de l'étude permet de faire des conjectures pour répondre à la dernière question.

Si on ne sait pas donner une réponse exacte, on pourra peut être fournir un encadrement.

- Autre étude : variation de l'aire d'un rectangle quand on fixe le demi-périmètre.

A ce propos, même question que précédemment, étant donnée une mesure d'aire, est-elle l'aire d'un rectangle de la famille ?

Les cadres en interaction ici sont nombreux :

le cadre géométrique, le numérique, le fonctionnel, les 2 cadres de représentation : graphique et algébrique.

Remarque.

Dans notre projet actuel d'organisation des séquences, le problème ne se présenterait plus de la même manière. Nous avons été conduites à développer l'étude du cadre propre de la géométrie pour que les élèves puissent développer une conception géométrique de l'aire indépendante de la mesure, puis en dialectique avec elle une conception numérique par pavage et mesure. Nous renvoyons à la brochure IREM "longueurs et aires" écrite avec Marie Jeanne Perrin, pour avoir plus d'informations sur l'état actuel du projet.

5. *Un problème abordé en CM2. Un projet d'étude.*

1) Parmi les rectangles à périmètre fixé
   - Y a-t-il un rectangle d'aire maximum ?

2) Existe-t-il un rectangle d'aire et périmètre fixés ?

$a + b = x$

$a \times b = y$ x,y fixés

Notre projet était de continuer cette étude par le thème suivant :

Pour chaque choix de couple (x,y) on peut se poser la question de savoir s'il existe un rectangle (a,b) tel que $a + b = x$

$a \times b = y$

Selon les valeurs de x et y, la réponse est oui ou non. On peut classer ainsi les couples (x,y) en 2 catégories.

Problème : On repère les couples (x,y) sur un quadrillage gradué. On attribue à chaque point une couleur selon la règle suivante :

rouge si la réponse est oui
bleu si la réponse est non

Colorier le quadrillage.

L'étude qui s'impose ensuite est celle de la frontière, d'un point de vue global et pas seulement point par point comme cela a pu l'être si elle est intervenue comme outil implicite de résolution. La caractérisation de la frontière va conduire à une relation entre x et y non prévisible qui pourra être institutionnalisée bien plus tard en tant qu'objet de connaissance élément d'une étude théorique : celle des équations du 2ème degré, ou celle des racines d'un polynôme. Le jeu de cadres ici se fait entre 3 cadres, le cadre géométrique : les rectangles avec leurs éléments descriptifs (dimensions, aire, périmètre) et les relations entre eux ; le cadre numérique: les mesures de grandeurs en jeu et leurs relations, et le cadre graphique qui permet une représentation des éléments d'étude, avec un certain caractère global. En effet, dans le cadre géométrique, les élèves manipulent des rectangles. Ceux-ci sont les uns à côté des autres même si certains sont dessinés et les autres imaginés. Cette représentation des objets d'étude de plus, incite à une conception discrète du problème. Sa traduction numérique grâce à la mesure ne change pas le regard sur le problème, bien qu'elle soit un bon outil technique.

Le cadre graphique, avec ses limites (la feuille de papier) suggère un regard nouveau en apportant son caractère continu. En effet, cela a un sens d'attribuer une couleur à chaque point. Mais pour le faire effectivement sur un quadrillage finement gradué, on ne peut pas considérer les points un à un, même s'il n'y en a qu'un nombre fini. Il faut les envisager plus globalement, insérer les petits problèmes étrangers dans un problème plus large qui en permettra l'organisation.

Or ce qui détermine la couleur des points, c'est l'existence du rectangle de demi-périmètre x et d'aire y. Et cela est conditionné par la situation de y par rapport à l'aire du carré $(\frac{x}{2})^2$.

Alors un point (x,y) est rouge si $y \leq (\frac{x}{2})^2$

bleu si $y > (\frac{x}{2})^2$

la frontière est $y = (\frac{x}{2})^2$. Elle correspond aux carrés.

Chapitre III

Une situation d'apprentissage au CP

- Le Jeu de cible -

Introduction.

La situation que nous décrivons dans ce chapitre a été réalisée dans une classe de CP du 27 Avril au 31 Mai 1976 (3ème trimestre de l'année scolaire 1975-76). C'est l'une des expériences sur laquelle nous nous appuyons pour évaluer notre démarche.

Ce chapitre comprend trois parties :

Dans la première partie, nous présentons une analyse a priori de la situation. En particulier, nous décrivons des jeux de cadres possibles et une manière pour la dialectique outil-objet de s'engager. Nous situons le registre dans lequel peut jouer le contingent.

La deuxième partie est consacrée à la chronique des séquences. Cette chronique est présentée sous des formes diverses :

- Un transcript suivi d'une analyse didactique pour la séance du 27/4.
- Un résumé pour les séances des 29/4, 4/5, 7/5 et 10/5.
- Une chronique analysée pour les 3/5, 11/5, 18/5.

La troisième partie concerne l'évaluation des élèves d'une part en cours de situation sur des épreuves attachées à la situation, d'autre part grâce à des tests de connaissances passés tout de suite après l'apprentissage (17/5), et quatre mois après, c'est à dire au début de l'année scolaire suivante dans les premières semaines.

A. Analyse a priori.

Dans le n°1 nous exposons les connaissances supposées des élèves au démarrage de la situation et en relation avec elle d'une part, les objectifs d'apprentissage d'autre part.

Dans le n°2, nous décrivons la situation : le jeu, les règles du jeu, les consignes de travail, et aussi les cadres de la situation et les variables didactiques (sur lesquelles on peut jouer).

Dans le n°3, nous envisageons des procédures possibles, les jeux de cadres qu'elles impliquent et le rôle que le contingent peut y remplir.

Le n°4 est consacré à une analyse épistémologique des séquences.

1. *Les connaissances.*

1.1. *L'ancien* ou les connaissances des élèves au démarrage de la situation et en relation avec elle.

En moyenne dans la classe, les élèves savent énumérer les entiers jusqu'à 50 environ, additionner des petits nombres. Ils savent comparer 2 nombres et souvent justifier leur résultat en calculant l'écart. Plus précisément, si $a < b$, ils calculent c tel que $a + c = b$.

Pour comparer des collections d'objets (objets matériels, baguettes ou nombres) ils ont eu recours soit au comptage, soit aux correspondances terme à terme.

Des symboles éventuellement organisés en tableaux à double entrée leur permettent de désigner par écrit les objets et relations qu'ils ont à étudier.

Le travail en classe peut être individuel, en équipe de 2 à 4 élèves ou collectif.

1.2. *Objectif d'apprentissage*

Il s'agit par la situation proposée de faire jouer aux nombres, à l'ordre et à l'addition leur rôle d'outil pour répondre à des questions. En interaction avec cela, il s'agit d'étendre la compétence numérique des élèves de deux points de vue :

a) - étendre le champ des nombres sur lesquels ils savent opérer.

- Préciser le sens de la numération de position.

b) - accroître la complexité des situations problèmes qu'ils peuvent traiter.

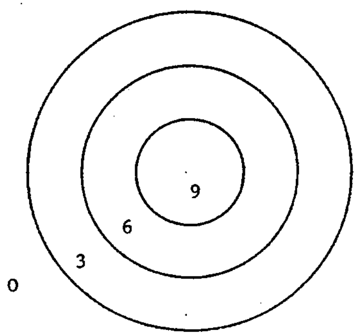
Un autre objectif est solidaire du précédent :

- Construire un langage algébrique et des représentations (tableaux de nombres, longueurs, graphiques) pour traiter une information abondante et résoudre des problèmes difficilement abordables sans ce recours.

Si possible, susciter le fonctionnement dans une situation simple, des notions de multiples et diviseurs dont l'apprentissage s'étale à notre avis sur une longue durée et qui interviennent implicitement dans la numération.

2. *LA SITUATION.*

2.1. La situation proposée aux élèves consiste en une suite de jeux répondant à des règles différentes regroupées en deux types. Pour chaque règle, il peut y avoir plusieurs parties, les éléments matériels du jeu sont constitués d'une cible "marquée" comme sur le dessin ci-dessous, dessinée au sol ou sur le mur, et des balles en caoutchouc. Il y a aussi des joueurs : les élèves de la classe ou ceux d'une autre classe.



Dans le premier type de jeu, il s'agit de marquer le plus possible de points.

1ère règle du jeu : le jeu est individuel. Chaque joueur (élève de la classe) lance la balle 3 fois. Il marque à chaque lancer le nombre de points indiqué par la zone de la cible que la balle a touchée. Le gain d'un joueur est le total des points marqués aux trois lancers. Le gagnant est celui qui a gagné le plus de points.

Consigne : 1) Jouer

2) Ordonner les 28 joueurs du gagnant au perdant

2ème règle du jeu : les joueurs sont groupés par équipes de 4 (ici 7 équipes). Chaque joueur lance la balle 3 fois. La marque (le score)d'une équipe est constituée de 12 nombres : les 3 marques de chacun des 4 joueurs. L'équipe gagnante est celle qui totalise le plus de points.

Consigne : 1) Jouer

2) Poser toutes les questions qu'on veut sur les résultats de la partie et essayer d'y répondre.

3) Ordonner les équipes, de la gagnante à la perdante par exemple, si ce n'est déjà fait.

4) Comparer les scores des équipes de la classe à des scores extérieurs.

Autre consigne : 1) Le jeu précédent est considéré comme la première manche. On joue une deuxième manche.

2) Chaque équipe compare ses scores aux deux manches et calcule l'écart.

3) On fait le classement général des équipes, compte tenu des 2 manches.

Dans le deuxième type de jeu, il s'agit de marquer un nombre de points fixé à l'avance ou de s'en approcher le mieux possible. Les joueurs sont en équipes de 4.

3ème règle du jeu : chaque joueur lance la balle 1 fois.

L'équipe qui marque 18 points a gagné.

Consigne : 1) Jouer

2) Ordonner les équipes

4ème règle du jeu : chaque joueur lance la balle 3 fois.

L'équipe qui s'approche le plus de 50 a gagné.

Consigne : 1) jouer

2) Ordonner les équipes

2.2. *Les cadres de la situation.*

- *le cadre matériel du jeu* comprend la cible marquée, les balles, les joueurs, les différentes règles du jeu, (et pour chaque règle) les différentes parties jouées.

- *le cadre de la représentation-mémoire du jeu.* Chaque partie peut-être représentée de manière à rendre disponible, à tout instant, l'ensemble des informations concernant cette partie. Ce peut être pour le jeu individuel la liste des points marqués par un joueur à chacun des 3 lancers. Ce peut être pour les jeux en équipe, un tableau à 4 lignes et 3 colonnes, la case (i,j) indiquant les points marqués par le $i^{ème}$ joueur au $j^{ème}$ lancer. On peut aussi représenter une marque de n points par une baguette de longueur $n.u$, où u est une unité de longueur choisie et représenter la marque d'une équipe par mise bout à bout des baguettes adéquates.

A un ordre sur les parties jouées correspond un ordre sur les représentations de ces parties.

- *le cadre numérique* est sollicité de façon essentielle dans cette situation. A chaque lancer de balle correspond un nombre : celui indiqué par la zone touchée de la cible. A chaque partie correspond un ensemble de nombres et à un ordre sur les ensembles de nombres selon une règle donnée, correspond un préordre sur les parties.

2.3. *Variables didactiques.*

Les différents paramètres du jeu dont un changement de valeur est susceptible d'entraîner un changement de procédure des élèves sont des variables didactiques (cf. G.Brousseau). Ici ce sont le nombre des zones de la cible, la valeur des points attribués à chaque zone, les relations entre les points des différentes zones (0, 3, 6, 9 ou 0, 2, 5, 10 n'ont pas les mêmes caractéristiques), le nombre des lancers par joueur, le nombre de joueurs par parties, le type de règle du jeu.

3. *JEU DE CADRES.*

3.1. Cadres et procédures. Il s'agit d'interactions entre trois cadres : le cadre matériel, le cadre numérique, le cadre de la représentation.

Le premier jeu de cadres intervient entre le numérique et le matériel. Il s'agit d'étudier une question posée dans le cadre matériel : "qui a gagné". Le critère pour y répondre est numérique "celui qui a le plus de points". Le cadre matériel ne peut apporter seul la réponse. Le travail consiste donc à traduire la question posée en termes numériques, à la résoudre par le calcul et à retraduire la solution dans le cadre d'origine. La règle du jeu a été choisie en tenant compte des connaissances des élèves. La traduction et la résolution numérique sont possibles techniquement pour eux. Il s'agit de l'addition de trois nombres pris parmi 0, 3, 6, 9 et de la comparaison de nombres inférieurs à 27.

Cette étape est un contrôle d'acquis de la classe, qui vont servir d'appui pour la suite.

Le deuxième jeu de cadres a pour but d'étendre la compétence numérique des élèves comme outil de résolution. Le problème est posé lors du jeu en équipes, les élèves sont confrontés là à une situation numérique plus complexe : comparer des scores S_i donnés chacun sous forme d'une liste de 12 termes. Plusieurs procédures sont possibles :

- procédure d'addition : c'est la procédure signalée dans le jeu précédent mais avec 12 nombres au lieu de 3. Dans cette procédure, le cadre numérique est le seul pressenti pour répondre à la question "quelle est l'équipe gagnante ?" Dans ce cas, ou bien l'élève sait effectuer les additions nécessaires et il peut comparer tous les gains des équipes (cela peut se produire s'il y a beaucoup de 0 et peu de 9) ou bien il y a des additions qu'il ne sait pas effectuer et la situation est bloquée pour lui. Cela aussi a toutes les chances de se produire, car l'habileté manuelle des élèves se développe au cours des lancers successifs, chacun a envie de gagner et cherche à marquer le plus possible de points.

- Procédure faisant intervenir le cadre de la représentation

L'intervention d'un cadre annexe, ici celui de la représentation, a pour but de fournir à l'élève un autre cadre dans lequel exprimer les S_i sous une forme qu'il puisse manipuler plus aisément et qui permette tout de même la comparaison. Cette intervention est fructueuse si l'élève peut engager une interaction avec le cadre numérique. Cette correspondance n'est pas complète, sinon l'élève utiliserait la procédure d'addition. Il y a alors déséquilibre dans l'état du problème et dans sa gestion selon le cadre dans lequel l'élève le considère. La rééquilibration se produit au cours des transferts successifs à l'un des cadres des relations établies dans l'autre.

Précisons ce jeu des déséquilibres-rééquilibration.

Tout d'abord, il ne peut se produire que si au moins deux registres sont concernés. Par exemple dans la procédure "baguettes" un seul cadre, celui de la représentation, peut être sollicité. En effet, si les scores des équipes sont représentés par des baguettes, comparer les équipes revient à comparer les longueurs des baguettes. Or ceci peut se faire directement par superposition sans aucun recours aux nombres. Mais cette procédure solitaire a peu de chances de se produire. Il faudrait pour cela que les baguettes soient aisément manipulables et superposables donc pas trop longues. Cela demanderait de choisir une unité de longueur toute petite pour représenter 1 point. Le comptage des unités serait fastidieux et source d'erreurs. Plus astucieux serait d'avoir repéré qu'on pouvait prendre une unité pour représenter 3 points (dans ce cas, implicitement l'outil adapté serait la propriété de 6 et 9 d'être des multiples de 3, ou plus simplement d'être somme de termes égaux à 3), ce qui n'est pas évident même si on sait que 3 + 3 = 6 et 3 + 3 + 3 = 9.

Un autre moyen est d'additionner les mesures, mais alors on est ramené au problème de l'addition.

En conclusion, il ne faut pas s'attendre à créer du nouveau à partir d'ancien en manipulant un seul cadre, que ce soit le cadre numérique ou celui de la représentation.

3.2. *Un jeu de cadres*. "Représentation-Numérique" dans la procédure tableau.

A une partie jouée, on peut associer un tableau comportant autant de lignes que de joueurs engagés dans la partie, autant de colonnes que de lancers par joueur. Les tableaux caractérisent les parties. Un tel tableau est parfaitement adapté à la situation, remplit très bien son rôle de mémoire du jeu et est facile à écrire par les élèves. Comparer les scores des équipes revient à mettre un ordre sur les tableaux. A ce point là de la situation un jeu de cadres entre le numérique et la représentation peut s'engager. Compte-tenu des nombres en jeu : 0-3-6-9 et des connaissances numériques des élèves on peut penser qu'ils n'auront pas de difficultés techniques à remplacer un tableau numérique donné par un tableau équivalent (en ce sens qu'il ne modifiera pas l'ordre des équipes), plus facile à manipuler. C'est le cas si on remplace dans un tableau les marques, 3-3-3 ou 6-3-0 par les nombres 9-0-0 qui ne correspondent plus à des marques mais qui remplissent les mêmes fonctions quant aux problèmes de comparaison. Chaque tableau donne lieu ainsi à une autre représentation de la partie jouée sous la forme : un certain nombre n de 9 et un reste r qui peut être 0,3 ou 6. Comparer deux tableaux, et donc deux équipes, revient à comparer deux représentations de la forme (n.9,r). Il est clair que dans le contexte du jeu, celui qui a le plus de 9 a gagné (les 9 étant obtenus directement ou indirectement en regroupant des marques). Il est clair aussi que, à même nombre de 9, l'équipe gagnante est celle qui a le plus fort reste. De la sorte les élèves peuvent comparer des parties dont ils ne savent pas évaluer les scores. Plus précisément au prix d'une complication de l'écriture des nombres (mais qui en fait n'est qu'apparente, la numération de position masquant la complexité) et d'une prise en compte simultanée de 2 données : le nombre de 9 et ce qu'il reste, (là encore ce n'est pas différent d'un nombre s'écrivant avec 2 chiffres en écriture ordinaire) les élèves peuvent comparer des nombres sortant de leur domaine numérique coutumier pourvu que n et r y soient.

Il reste aux élèves à transférer les informations du type (n.9,r) dans le cadre numérique en explicitant les opérations. Il y a pour le moment déséquilibre de fonctionnement entre les 2 cadres. Les conventions d'écritures des opérations + et × et le support sémantique assuré par le jeu permettent d'associer à (n.9,r) le nombre $(n \times 9) + r$. En transportant aux $(n \times 9) + r$ la règle de comparaison des (n.9,r), l'élève rééquilibre ses connaissances dans les 2 cadres. Ce faisant, il étend le registre des nombres qu'il sait additionner, ou comparer, mais ces nombres ne sont pas encore écrits sous forme canonique.

Notons que les nombres 0, 3, 6, 9 qui ont servi de base constituent une variable didactique. Une modification des valeurs peut entrainer un changement de procédure.

Le dernier pas que l'élève doit faire pour obtenir le total des équipes est de prendre en compte que dans le procédé usuel d'écriture des nombres on groupe par dix au lieu de 9 et que 9 + 1 = 10. C'est l'objet de la consigne de comparaison à des scores extérieurs.

Notons à quel point ici le jeu de cadres est imbriqué avec une dialectique ancien-nouveau dans le numérique. C'est cette imbrication qui a rendu possible le déséquilibre au profit de la représentation et sa rééquilibration au profit du numérique.

D'autres traitements des tableaux sont possibles. Par exemple pour comparer 2 tableaux on peut rechercher les 9 dans chacun d'eux. Si on en trouve dans les 2, on en barre un de chaque côté ; puis on recommence jusqu'à ce qu'on ne puisse plus. A ce moment là, l'un au moins des 2 tableaux n'a plus de 9. On fait la même opération avec les 6 et les 3. A la fin il reste peu de nombres dans chaque tableau, on peut les additionner et/ou les comparer. Cette procédure conduit à comparer les tableaux 2 à 2, ce qui est long, même si la transitivité économise du travail. Dans cette procédure on utilise implicitement la règle suivante : pour comparer a + b et a+ c, il suffit de comparer b et c. Cette compatibilité de l'ordre et de l'addition permet de ramener le traitement de nombres sortant du domaine connu,mais donnés par l'intermédiaire de nombres connus,à celui de nombres maîtrisés.

Dans cette dernière procédure, il s'agit plutôt de solution par réduction du problème. Dans l'opération précédente, il s'agissait d'extension de connaissances et savoir-faire. Les 2 procédés sont duaux. On peut aussi utiliser le fait que 9 = 3+3+3 et 6 = 3+3 pour exprimer toutes les marques en fonction du nombre 3 et associer à chaque tableau T_i le nombre k_i de 3 qu'il fournit. Comparer deux tableau T_i et T_j revient à comparer k_i et k_j qui sont deux nombres et non plus deux couples de nombres comme dans la représentation précédente. Mais les k_i sont produits par une décomposition des nombres alors que le problème incite plutôt à les grouper. Pour s'intéresser aux k_i, il faut au préalable s'être rendu compte que 9 et 6 sont des multiples de 3. Cela rejoint les remarques faites à propos de la représentation des scores sous formes de baguettes.

Le deuxième type de jeu sollicite la soustraction, (et même la soustraction ou l'addition itérée). C'est dire qu'il s'agit essentiellement de développer le cadre numérique, le cadre matériel servant de support pour contrôler le sens des actions et des calculs.

3.3 *Rôle du contingent.*

Pour que les procédures de départ puissent évoluer ou être remises en question (et c'est le but poursuivi en faisant jouer les variables didactiques), les élèves ont besoin de jouir d'une certaine marge de manoeuvre par rapport aux questions posées. Il est nécessaire qu'ils puissent poser et se poser des questions annexes en rapport avec la situation-problème, mais dont ils étudieront ensuite l'intérêt vis à vis du problème posé. Or si la situation-problème est riche et ouverte (assez mais pas trop) il est

possible aux élèves d'enrichir le corpus des questions posées. L'organisation des moyens d'action et des réponses à ces questions, contingentes dans le détail puisque non prévues par l'enseignant, est une occasion d'enclencher jeux de cadres et dialectiques. Par là même les procédures évolueront. Pour cela, nous avons postulé que des questions différentes peuvent avoir des effets équivalents. Nous pouvons alors en laisser l'initiative aux élèves.

Ces questions posées par les élèves eux-mêmes échappent aux difficultés de la "dévolution" et à l'ambiguïté qu'elle provoque. Par dévolution, on entend la transformation que le sens du problème subit en passant du maître à l'élève (par la formulation d'un énoncé et la réception de cet énoncé par l'élève qui va s'efforcer de lui reconstruire un sens). Ce que le maître attend de l'élève n'est pas toujours ce que l'élève croît que le maître attend de lui.

Voyons plus en détail comment dans le jeu de cibles, les différentes dialectiques s'enchaînent.

4. *EPISTEMOLOGIE DES SEQUENCES.*

4.1. Phase a) DOO:* Familiarisation avec le jeu dans sa forme individuelle, qui a gagné ?

Du point de vue moteur, l'élève va développer son habileté à lancer la balle et contrôler sa zone de chute. C'est une nécessité si l'élève veut avoir un certain contrôle sur ses actions dans le cadre matériel et s'il veut l'exploiter. Du point de vue cognitif, il s'agit de contrôler et renforcer la disponibilité de l'addition de nombres petits ($\leqslant 27$) et de rendre familière la comparaison de 2 d'entre eux, si cela n'était pas déjà le cas.

Envisageons les procédures possibles pour répondre à la première consigne (jeu individuel).

P_1 : Additionner les points de chacun et comparer les totaux. Chaque élève doit additionner 3 nombres égaux à 0,3,6 ou 9 puis comparer les 28 totaux. Cette comparaison peut se faire individuellement. Il faut alors que chacun dispose de la totalité de l'information puis, que chacun travaille. Il reste à comparer les productions des élèves, au cours d'un bilan collectif par exemple,de manière que la contestation soit possible et levée par des explications susceptibles d'emporter la conviction de tous. Dans le cas qui nous intéresse, compte tenu des acquis des élèves, tous devraient envisager cette procédure, l'addition étant un outil familier, adapté à ce problème. Techniquement, chacun est capable de faire l'addition qui le concerne. La classe

* Dialectique outil-objet désignée par D.O.O ou DOO

est capable d'ordonner une liste de 28 nombres inférieurs ou égaux à 27. L'addition et la comparaison des nombres sollicités sont des outils explicites connus et mis à l'épreuve. On suppose toutefois que chaque joueur a mémorisé sa marque et que l'information fournie par chacun est admise par les autres. Une mémoire écrite du jeu permet de disposer de façon sûre, à tout moment, de cette information, donc de la contrôler.

P_2 : Repérer dans un premier groupe tous ceux qui ont trois 9, puis dans un deuxième groupe ceux qui ont au moins deux 9 repérés directement (exemple 9, 3,9) ou indirectement (exemple 9,3,6). Grouper ensuite ceux qui ont plus de 9 et moins de 18 et enfin ceux qui ont moins de 9. Dans le 1er groupe, tous les scores sont égaux et réalisent le maximum. Dans les autres groupes, on isole les 9 et on ordonne selon ce qu'il reste. On peut prévoir des cas où la conclusion s'impose sans calcul : 3 fois 9 points ou 3 fois 0 point. Entre ces cas extrêmes, on peut prévoir une utilisation massive de la première procédure.

4.2. Phase b) DOO : Phase d'apprentissage.

On veut que les élèves étendent leur connaissance des nombres. En particulier, on veut qu'ils étendent l'ordre et l'articulation entre l'ordre et les opérations à des nombres sortant de leur domaine familier. Nous entendons par là : étant donnés 2 nombres a et b différents, reconnaître le plus petit des deux et savoir calculer c tel que, si $a < b$, $a + c = b$.

Pour disposer de nombres plus grands qu'à l'ordinaire, on va recourir à l'addition comme moyen pour en engendrer.

4.2.1. Choix du problème.

Nous choisissons un contexte qui a du sens pour l'élève : lancer des balles dans la cible connue, avec une autre valeur de la variable didactique-nombre de lancers- 12 marques pour 1 jeu au lieu de 3 marques ; mais toujours la même cible et la même règle : l'équipe qui a marqué le plus de points a gagné. Ainsi le problème est tout à fait analogue au précédent : comparer des scores dont chacun est donné par l'intermédiaire de plusieurs marques. La procédure addition est parfaitement adaptée. C'est là que la difficulté commence : les nombres sont petits, connus. Mais 12 nombres à additionner, même s'il y a des zéros, c'est beaucoup. Il faut s'y prendre autrement.

Expliquons pourquoi nous avons choisi de sauter de 3 à 12 marques. Les élèves savent compter oralement au delà de 50 en général et parfois au delà de la centaine. Le nom des nombres leur confère une existence brute, globale, tel un objet. L'écriture connue de certains nombres avec plusieurs chiffres est perçue plutôt comme une entité malgré le travail de numération fait avant le début de la situation "cibles". Un des objectifs de l'apprentissage est de restituer son sens à l'écriture des nombres en base dix en explicitant l'information concentrée dans la numération de position, le caractère conventionnel du codage , la diversité des codages envisageables, la puissance de ce type d'écriture pour engendrer des nombres et les moyens d'action qu'elle permet pour les additionner, les comparer.... bref pour calculer.

Nous avons estimé suffisant le saut de 3 à 12 marques pour que la procédure par addition totale soit remise en cause et que soit suscitée une réorganisation des connaissances. Si la procédure était maintenue, il se poserait de toute façon le problème de l'écriture des nombres > 100, ce qui est un de nos objectifs.

4.2.2. La représentation.

Dans le jeu en équipe, le grand nombre de marques rend nécessaire une mémoire écrite des points obtenus à chaque lancer, quelles que soient les questions relatives aux marques qu'on se pose. Par ailleurs, le jeu comprend une double série d'informations : les joueurs de l'équipe, les points marqués par chacun. La représentation du jeu sous forme de tableau à double entrée est bien adaptée : il peut être pour chaque manche un tableau à 4 lignes (une par joueur) et 3 colonnes (1^e-$2^è$-$3^è$-lancer) ou le contraire. Un tel tableau comporte dans les deux cas 12 nombres. Si deux tableaux diffèrent par un seul nombre, c'est qu'ils représentent des parties différentes du point de vue de la marque. Mais des tableaux différents peuvent totaliser le même nombre de points. Des équipes peuvent être ex aequo, comment les repérer ? Plusieurs procédures sont possibles. Nous en avons signalées au paragraphe jeux de cadres. Etudions plus en détail celle qui met en oeuvre un jeu entre 2 cadres : celui de la représentation et le cadre numérique, la sémantique de la situation étant celle du cadre matériel.

4.2.3. La procédure "Tableau".

Compte tenu de la marque de la cible : 9,6,3,0 et de l'objectif du jeu : marquer le plus de points, le nombre 9 est privilégié. Même si les élèves ne savent pas additionner beaucoup de 9, ils savent obtenir des 9 en groupant des 3 ou des 6 et 3. Il s'agit là d'une opération constructive. En revanche, obtenir des 9 à partir de 6 uniquement demande une opération en 3 temps : une décomposition 6 = 3+3, une construction 6+3 = 9 et une transformation 6+6 = 9+3 ou 6+6+6 = 9+9. En principe, les outils mathématiques sollicités dans cette opération sont connus. Mais leur fonctionnement coordonné peut poser problème à certains élèves. Pour ceux-là, la situation intervient en renforcement. Cette étape étant explicitée, à chaque tableau correspond deux informations pertinentes pour la comparaison : le nombre maximum n de 9 qu'il fournit et un nombre r = 0,3 ou 6. Ordonner les scores revient à ordonner les tableaux, ce qui revient à ordonner les coupes (n,r). Pour plus de commodité, formulons cette procédure en termes mathématiques : notons J_i le jeu d'une équipe E_i, S_i le score correspondant à J_i, T_i le tableau des marques à 4 lignes et 3 colonnes associé à J_i, n_i le nombre de 9 que fournit le tableau directement ou par regroupement et r_i les points restants. On peut écrire le diagramme suivant

Cadre matériel

$$\begin{tikzcd} J_i \arrow[r, mapsto, "S"] \arrow[d, "T"'] & S_i = (n_i \times 9) + r_i = (p_i \times 10) + u_i \twoheadrightarrow \varepsilon(S_i) \\ T_i \arrow[r, mapsto, "f"'] & (n_i.9,\ r_i) \arrow[u, "g"] \arrow[u, bend right, "h"'] \end{tikzcd}$$

écriture en base dix

cadre numérique

cadre de la représentation

La procédure "addition" fournit directement les $\varepsilon(S_i)$.

Si $\varepsilon(S_i) = \varepsilon(S_j)$, E_i et E_j sont ex aequo.

Si $\varepsilon(S_i) < \varepsilon(S_j)$ E_j gagne devant E_i.

Etudions la procédure qui transite par T, f, g.

. La mise en place de T utilise du connu, plus ou moins familier mais bien adapté à la situation et facile à réaliser techniquement : écrire le nom d'un joueur de l'équipe sur une ligne et à côté ses 3 marques, recommencer à la ligne du dessous avec chacun des joueurs de l'équipe.

Toutefois, les tableaux peuvent n'être que des mémoires inertes.

. Une condition nécessaire pour qu'il y ait élaboration de f est que les tableaux remplissent effectivement leur rôle de représentation et restent en interaction avec l'objet, ici le jeu. Cela demande que l'élève puisse

transférer le problème dans le cadre de la représentation et donc qu'il ait le choix de la procédure de comparaison. De ce point de vue, si l'élève recourt au tableau de sa propre initiative, c'est l'indice qu'il le considère comme une représentation adaptée susceptible de lui rendre des services, que le tableau est mobilisé comme outil de résolution, même si l'élève n'aboutit pas complètement. Si le maître, convaincu que le tableau est un bon outil, le prépare "pour gagner du temps et pour que ce soit plus propre" avec en plus une colonne vide, c'est l'indice que la procédure d'addition s'impose à lui. Il a d'ailleurs des arguments pour justifier sa position : la procédure est adaptée au problème et l'extension de l'addition est son objectif d'apprentissage. Seulement dans ce cas, l'élève n'a plus le choix de la procédure. Le contrat l'aspire vers le calcul du total des points. Or sans même recevoir une incitation de cette nature et qui peut paraitre bien anodine, la seule question "qui a gagné" appelle déjà le calcul du total. Pourtant cette procédure ne peut amener au résultat que si l'élève sait déjà faire les additions qu'on veut qu'il apprenne à faire. Si l'élève ne sait pas, à défaut de procédure alternative il est bloqué ; il ne fait rien ou n'importe quoi pour fournir une réponse, ce qui revient au même.

Pour que les élèves ne soient pas conduits à l'inaction, il faut que la situation-problème provoque chez eux le besoin d'en faire une analyse détaillée. Celle-ci peut se faire à l'occasion de questions annexes et contingentes que les élèves posent au vu des résultats du jeu avant que le maître ne demande d'ordonner les équipes. Par exemple, on peut chercher à classer les joueurs à l'intérieur d'une équipe ou rechercher les ex aequo ou ceux qui ont réalisé 3 fois la mêe marque etc.... Si le maître laisse aux élèves le choix des questions, une grande diversité peut se produire. Le travail d'organisation des questions et la recherche des réponses vont susciter de la part des élèves des lectures différentes des tableaux. Leur confrontation amènera l'ensemble des élèves à une meilleure connaissance des nombres qui composent ces tableaux et de ce qu'ils représentent et à ne pas être subjugués par une procédure qui semble s'imposer. Cette phase des questions annexes, contingentes, cristallise une bonne part de l'incertitude du maître et de la marge de manoeuvre des élèves nécessaire au choix de la procédure et par conséquent à la mise en oeuvre d'outils implicites. C'est une phase dans laquelle les différences de comportements cognitifs peuvent librement évoluer. Toutefois, on peut prévoir la diffusion d'un petit nombre d'idées force qui donneront tournure au comportement cognitif global de la classe.

- la construction de f n'est pas seulement une question de comptage ou de calcul bien que les nombres à manipuler soient petits : 0, 3, 6, 9. Il faut repérer qu'il est intéressant de compter les 9 du tableau, mais aussi que le tableau peut comporter plus de 9 qu'il n'en affiche directement. Cela suppose de la part de l'élève une bonne connaissance de la composition du tableau et donc une analyse préalable. Celle-ci peut se faire à l'occasion de questions proposées par les élèves (voir plus haut). Le contrôle des résultats (les (n.9,r)) est assuré par la confrontation des propositions des équipes. Aucune équipe n'a envie d'être plus mal classée que nécessaire. Ainsi chacune a intérêt à rechercher le bon calcul. Or techniquement, c'est possible pour tous les élèves.

Mais la correspondance f n'a d'intérêt que si les élèves peuvent mettre un ordre sur les couples (n.9,r) qui reflète l'ordre des équipes. Là encore, compte-tenu du contexte-jeu qui leur donne leur sens, l'ordre sur les couples s'impose : celui qui a le plus de 9 a gagné. A même nombre de 9, on regarde les restes. Autrement dit,

Si $n_i < n_j$ $\qquad (n_i.9,r_i) < (n_j.9,r_j)$

Si $n_i = n_j$ $\qquad (n_i.9,r_i) < (n_i.9,r_j)$

et $r_i < r_j$

La question de l'ordre des équipes est résolue.
La mise en place de h correspond à un travail de formulation écrite des scores en relation avec la recherche du total des points de chaque équipe.

Le couple (n.9,r) traduit $\underbrace{9+ \ldots + 9}_{n \text{ termes}} + r$

4.2.4. Phase c) DOO : Explicitation-formulation.

C'est l'occasion d'introduire un codage pour désigner la somme de n termes égaux : par exemple (n × 9) pour 9+ .... +9. D'une façon générale, les scores pourront être codés par des écritures de la forme (n × 9) + r.

Ce travail peut avoir diverses incidences :
- situer un nombre a parmi les multiples d'un nombre b.
- écrire les nombres en base 9
- tout nombre de la forme (n × 9) + r, r < 9, peut s'écrire (p × 10 + u) u < 10 et réciproquement. Le travail pour passer des "paquets de 9" aux "paquets de 10" est facile si n < r : on enlève à r autant de 1 qu'il y a de paquets de 9.

- écrire les nombres en base 10
- comparer des nombres écrits en base 10.

La consigne "comparer les performances de la classe à celles d'une classe voisine" demande l'explicitation de h et son utilisation dans la recherche de l'information portée par l'écriture standard des nombres.

Par exemple, une équipe extérieure a gagné 39 points en jouant avec la même cible, selon la même règle du jeu, comment se situe-t-elle parmi les équipes de la classe? Deux manières de procéder se présentent naturellement : écrire 39 sous la forme (n.9,r) ou écrire les différents couples $(n_i 9,r_i)$ sous forme réduite, c'est à dire totaliser les points. Le nombre de performances extérieures à comparer à celles de la classe est une variable qui va privilégier l'une ou l'autre des procédures. S'il n'y a qu'un score extérieur, on a intérêt à l'exprimer sous la forme (n.9,r). Cela fait un seul calcul et on dispose alors de moyens de comparaison. S'il y a beaucoup de scores extérieurs on a plutôt intérêt à calculer les totaux de la classe. Compte tenu de la pression qui ne manquera pas de se produire de la part des joueurs pour savoir "combien" de points leur équipe a obtenus, nous choisissons de privilégier la première procédure en introduisant seulement 2 ou 3 scores extérieurs.

Pour transformer 39 en (n.9,r), les élèves ont besoin d'expliciter les conventions d'écriture

39 = (3 × 10) + 9

de formuler la relation opératoire entre 9 et 10

10 = 9 + 1

3 × 10 = 3 × (9 + 1) = (3 × 9) + (3 × 1)

pour conclure 39 = (4 × 9) + 3

L'outil important ici est la multiplication comme addition itérée. Elle est implicite comme opération malgré l'explicitation des calculs.

Familiarisation avec le nouveau explicité.

La deuxième manche a pour but de familiariser les élèves avec les nouvelles écritures et de faire intervenir celles-ci comme outils explicites pour comparer des nouveaux scores, des sommes de deux tels nombres et des écarts : étant donnés a et b a < b, trouver c tel que a + c = b.

Décrivons la séquence. Chaque élève à la fin de la 2ème manche dispose de 2 données multiples : les performances de son équipe à chaque manche. Il va devoir appliquer au score de la 2ème manche la règle d'écriture établie lors de la 1ère manche. L'algorithme d'écriture est simple, tous peuvent s'en servir avec succès.

En demandant à chaque équipe de comparer les scores aux deux manches, la maîtresse demande de refaire dans un cas simple un exercice déjà fait. Il s'agit de comparer deux scores au lieu de 7. En demandant de préciser combien de points ils ont en plus ou en moins à la 2ème manche par rapport à la 1ère, elle demande d'étendre à de nouveaux nombres une pratique connue sur des petits nombres.

En fait deux cas peuvent se produire : soit à comparer $S = (n \times 9) + r$ et $S' = (n' \times 9) + r'$

. Si $n < n'$ et $r < r'$ les 2 composantes n et r agissent séparément et il s'agit seulement de juxtaposer 2 comparaisons et soustractions faciles.

. Si $n < n'$ et $r > r'$ il peut y avoir un décalage entre la capacité à comparer et celle à calculer l'écart : comparer se fait en négligeant les restes, calculer l'écart exige de décomposer un groupement (cf. soustractions à retenue).

Dans ce cas, nous pouvons prévoir que l'élève aura de la difficulté à justifier sa comparaison même s'il en est convaincu. L'explicitation des raisons peut se faire par la confrontation des résultats des 4 membres de l'équipe et par l'argumentation à laquelle elle conduit. Mais cette confrontation est contingente.

Elle peut aussi se produire lors d'une situation de formulation et validation construite à cet effet [Brl].

Soulignons que le travail concerne la soustraction à retenue avec des nombres petits et un contexte explicite, ce qui compense la difficulté provenant de la lourdeur de l'écriture. En effet, le jeu matériel qui est à l'origine des écritures de nombres sert de support à l'écriture et apporte une aide au calcul en contrôlant le sens et en suggérant des procédures. Ici, les 9 ont été obtenus par groupement, on peut concevoir d'avoir à décomposer un groupement, on retrouve les éléments d'origine. Par exemple, pour $S = (3 \times 9) + 6$ et $S' = (4 \times 9) + 3$. On peut écrire $S' = (3 \times 9) + 9 + 3$ et $S' = S + 3 + 3 = S + 6$.
Une autre procédure possible consiste à transiter par 4×9. On obtient

$$\underbrace{(3 \times 9) + 6 \xrightarrow{+3} 4 \times 9 \xrightarrow{+3} (4 \times 9) + 3}_{+6}$$

4.4. *Institutionnalisation. phase d) DOO.*

Indépendamment de l'écriture des nombres, étant donnés deux nombres a et b, $a < b$, on peut trouver c tel que

$$a + c = b$$

Familiarisation-renforcement de la manipulation des nouvelles écritures pour désigner des nombres plus grands. Correspondance avec les écritures en base dix. Cela se produit à l'occasion du classement général compte tenu des 2 manches.

Institutionnalisation de l'écriture en base dix de nombres dépassant la centaine.

4.5. *Un nouveau problème-de nouveaux outils sollicités.*

4.5.1. *La soustraction et la décomposition des nombres : outils sollicités dans un registre numérique connu.*

La règle du jeu - réaliser 18 points - met en oeuvre un domaine numérique maitrisé. La règle du jeu - se rapprocher de 50 - a pour but d'étendre ce domaine. Dans la phase précédente, on se proposait de construire de nouveaux nombres par additions de nombres connus. Ici, la soustraction et la décomposition des nombres connus sont les moyens de résolution. Les compétences numériques sollicitées sont en principe disponibles chez les élèves. Pour gagner, on a intérêt à connaitre avant le jeu, les différentes décompositions de 18 en somme de 4 termes égaux à 0,3,6 ou 9. Ensuite on peut soit faire des prévisions de points à marquer à chaque lancer et les corriger au fur et à mesure du jeu si elles ne sont pas respectées, soit jouer au hasard au début et adapter ensuite de façon à réaliser l'une des décompositions gagnantes de 18. La coordination de l'équipe est un élément déterminant du résultat.

4.5.2. *Extension du registre numérique sollicité.*

Le jeu à 50 est apparemment le même. On a seulement remplacé 18 par 50. Mais les nombres de l'ordre de 50 ne sont plus dans le registre usuel des élèves pour toutes les manipulations numériques. Pour gagner, les élèves peuvent comme dans le jeu à 18 chercher systématiquement des décompositions de 50 à l'aide des nombres permis et essayer de réaliser les prévisions. Cela demande un effort de calcul. Ils peuvent aussi jouer au hasard au début de la partie (l'équipe dispose de 12 lancers). Cela permet de réduire l'écart à 50 donc de ramener le nombre de points à atteindre dans un domaine numérique où la décomposition des nombres est opératoire. Une analyse a postériori des scores effectivement réalisés permet de poser la question "Peut-on atteindre 50 avec la règle du jeu donnée ou pas ? Sinon, quel est le nombre le plus proche qu'on peut atteindre ?" On essaie de répondre à ces questions en cherchant les nombres que la règle du jeu permet d'atteindre. Autrement dit, on cherche à caractériser les nombres obtenus comme somme de plusieurs termes égaux à 0,3,6 ou 9. Le cadre de la représentation et le cadre numérique peuvent interagir et provoquer des déclarations telles que "on ne peut faire que des 3". La représentation des points qu'on peut marquer à chaque lancer sous forme d'arbre et l'addition des points des différents lancers d'une partie permet de connaitre un ensemble de nombres qu'on peut atteindre. En faisant des hypothèses restrictives sur les marques : par exemple on ne fait que des 3 (resp. des 6, resp. des 9) on peut représenter graphiquement les points marqués par des couples (j,n_j) où j désigne le numéro d'ordre du lancer et n_j le total des points marqués au $j^{ième}$ lancer depuis le début de la partie, sans calcul, en reportant à partir d'un point (j,n_j) du quadrillage ce qui s'est passé au coup suivant. Le travail consiste à interpréter le graphique pour obtenir le résultat numérique cherché.

5. *MISE A NIVEAU DE LA CLASSE ET EVALUATION.*

A la fin de chaque phase, la maîtresse donne à faire à chaque élève par écrit et en classe des exercices. Ces exercices sont de deux types et remplissent des fonctions différentes :

1) Repérer les élèves en difficulté et leur apporter individuellement un complément d'informations et d'explications. Cette mise à niveau de l'ensemble de la classe est essentielle à la progression de l'apprentissage. Elle n'est cependant réalisable que si peu d'élèves en ont besoin. Pour remplir cette fonction de repérage et mise à niveau, la maîtresse propose aux élèves un petit nombre d'exercices courts mais typiques de l'apprentissage visé. Il s'agit par exemple à la fin de la 2ème phase de 2 ou 3 additions simples ou avec retenue portant sur des nombres plus grands qu'à l'ordinaire.

2) Familiariser l'élève avec le "nouveau" qu'il doit retenir et maîtriser.

3) Evaluer l'élève, tester ses acquis présumés après la mise à niveau.

Pour répondre à cela, la maîtresse propose plusieurs séries d'exercices comportant chacun de nombreuses petites questions. Chaque série met en jeu <u>un</u> élément nouveau (dans un contexte plus ou moins complexe) qui a déjà fonctionné en situation d'action et avec lequel il reste à se familiariser pour en acquérir une bonne maîtrise et donc une bonne disponibilité.

Par ailleurs, ces tests révèlent les faiblesses. Ils permettent une nouvelle mise à niveau sélective si elle porte sur peu d'élèves et la mise en place d'une nouvelle situation d'action centrée sur les difficultés des élèves si nombre d'entre eux sont concernés.

B. Chronique.

Plan de la chronique du 27/4/76 au 21/5/76.

I. Premier type de jeu

1ère consigne

27/4 Jeu individuel

2ème consigne

Jeu en équipes : 1ère manche

Elaboration de l'écriture (n □ 9) + r

29/5 - Comparaison des scores de 2 équipes. Calcul de c tel que a + c = b.

3/5 matin - Comparaison des scores (1ère manche)

3ème consigne /33 /39

3/5 après-midi *4ème consigne*

2ème manche jeu et écriture des scores

5ème consigne

4/5 - Comparer les points de la 2ème manche à ceux de la 1ère manche

- Comparer au message d'une autre classe 51

T E S T

6ème consigne

7/5 - Calcul de la différence des scores aux 2 manches

10/5 *7ème consigne* : classement général

T E S T

11/5 1) Rappels sur la situation complète

Pratique des écritures

- $C > C_1$ .... $C = C_1 + 1 \square 9 - 3$
- numération en base neuf, échanges
- écriture d'inégalités en base dix

II. Deuxième type de jeu

2) *8ème consigne* jeu à 18

17/5 *9ème consigne*

jeu à 50

T E S T 27 + x = 80

18/5 Renforcements de calculs numériques à partir des tableaux de marques du jeu à 50

21/5 Représentation graphique des multiples de 3, multiples de 6, multiples de 9

P = 3 × 9 6 × 9 9 × 9

Exploitation pour repérer les nombres qui peuvent être des scores du jeu et les distinguer de ceux qui ne peuvent pas.

La dialectique outil-objet à travers les jeux
de cadres dans les jeux de cible

Anciennes connaissances
- Scores
- Tableaux de valeurs
- Numération sur de petits nombres : et < (relation d'ordre) + (addition) (en base 10)

1er problème posé : Comparaison et addition des scores des différentes équipes.

Cadre de travail : Pour chaque équipe, on a fait un tableau représentant les résultats des différents joueurs de l'équipe.

joueurs \ lancers	1er lancer	2er lancer	3er lancer
1er joueur	0	9	6
2ème joueur	3	6	3
3ème joueur	9	0	3
4ème joueur	3	3	3

Chaque joueur lance 3 balles dans une cible comportant un 0, un 3, un 6 et un 9.

Outil de travail : 3, puis 9 en tant qu'objet unitaire (on compte les 3, les 9).

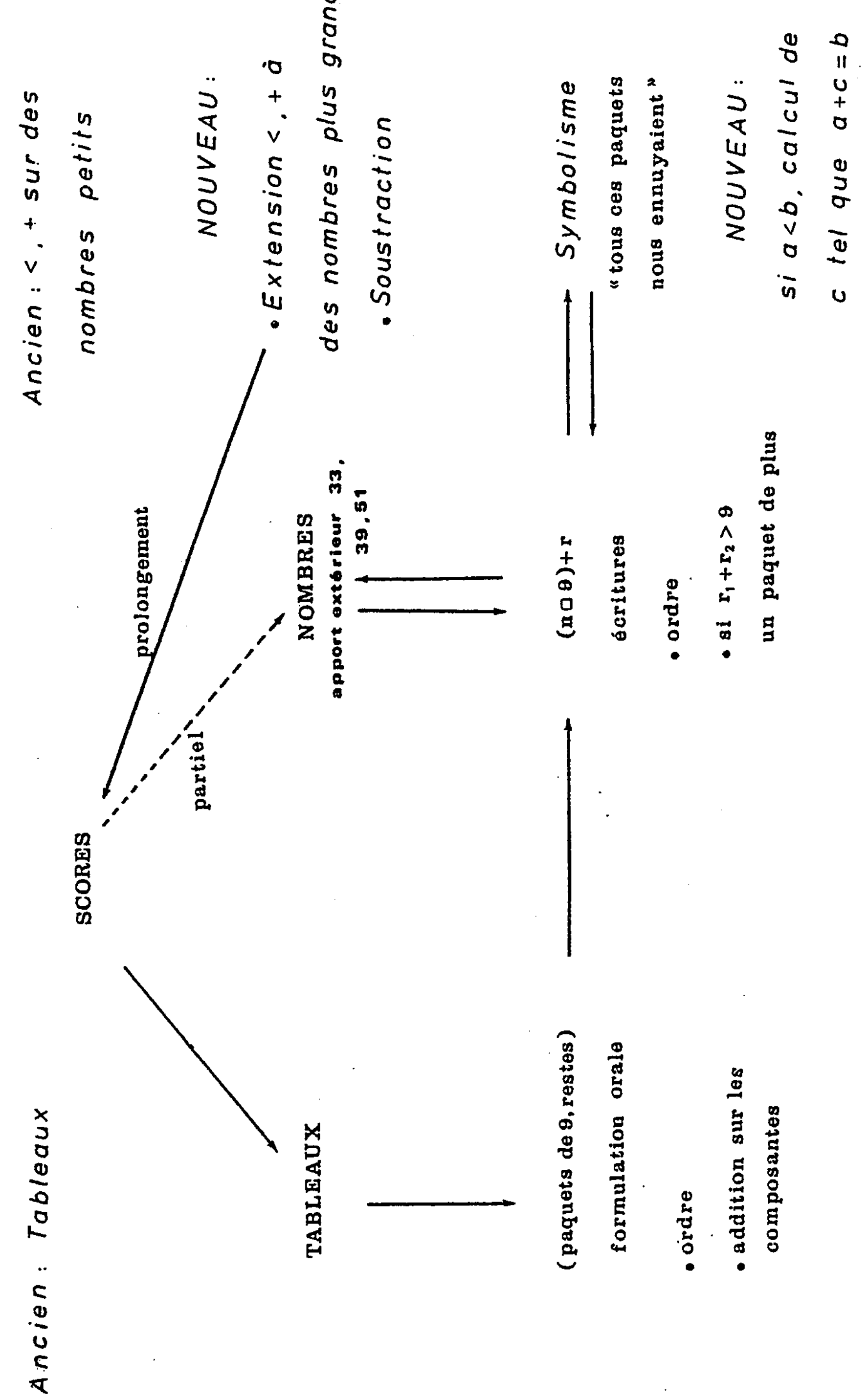
Il y a alors création, en vue de résoudre le problème

- Formation de couples : (paquets de 9, restes)	→	- paquets de 9 et restes (Formulation orale) écriture n □ 9 + r
- Ordre et addition sur chacune des composantes : c'est insuffisant	→	- addition : si $r_1 + r_2 > 9$, on fait un paquet de plus pour pouvoir comparer → ordre sur les écritures - Numération en base 9 - "Tous ces paquets nous ennuyaient" → Si A < B, Calcul de C tel que A + C = B avec C sous la forme p □ 9 + q

2ème problème : situer des scores provenant de l'extérieur (33, 39, ... , 51) parmi ceux de la classe
→ écriture de ces scores sous la forme n □ 9 + r

3ème problème : on fait une deuxième manche
→ comparaisons globales.

Résultats :
- extension de "<" et de "+" pour des plus grands nombres
- calcul de c tel que a + c = b
(institutionnalisation et familiarisation)



CHRONIQUE.

La situation s'est déroulée du 27/4/76 au 21/5/76. Nous avons observé les séquences des 27/4 (en partie), 3/5, 4/5, 11/5, 18/5.

Séance du 27/4.

1ère phase.

1) Le premier jeu (individuel) s'est déroulé très vite. Chacun a compté mentalement ses points : comme les élèves étaient malhabiles, ils ont réalisé peu de 9, beaucoup de 0, quelques 3 et 6. La maîtresse a écrit au tableau sous la dictée des élèves, les scores de chacun. Collectivement, ils ont ordonné ces nombres et obtenu le classement cherché.

2ème phase

2) Le deuxième jeu (en équipe) demande une organisation préalable.

a) La maîtresse donne d'abord la règle du jeu : lancer la balle dans la cible, chacun a droit à 3 essais. L'équipe gagnante est celle qui réalise le plus de points. La maîtresse rappelle qu'il y a 7 équipes déjà constituées dans la classe et qu'elle a dessiné 7 cibles sur le sol. Chaque équipe dispose d'une balle et d'une cible.

b) Avant d'aller jouer, la maîtresse demande à la classe : "Comment allons-nous nous organiser pour savoir quelle sera l'équipe gagnante ?"

Une proposition vient de différents élèves : "Chaque équipe s'occupe de ses points. sur une feuille, on marque le nom des enfants de l'équipe. Le chef d'équipe marquera les points de chacun. Un autre le remplacera quand ce sera son tour de jouer". La proposition est acceptée et mise en oeuvre immédiatement.

c) Le jeu se déroule dans la cour (7 autres cibles étaient dessinées dans le préau, en prévision de mauvais temps).

d) De retour en classe, les élèves en collectif font un compte-rendu du jeu à la demande de la maîtresse (nous la désignons par M).

M : Pourquoi avez-vous fait un tableau avec vos mesures ?
Hélène : On voulait faire un jeu. On a préparé un tableau pour mettre combien on a fait, parce que c'était une cible. Y avait un bout qui était blanc avec 3. Quand on mettait dans le rond 3, on avait 3.
M : 3 points
Hélène : 3 points
Eric : quand on était dans le rouge, on avait marqué 6. Et quand on était dans le
M : rouge. C'est rouge ?
Eric : On en avait marqué 9
M : (bis). Pourquoi on en avait marqué 9 dans le rouge, 3 dans le (le choeur "blanc"). 6 dans le (le choeur "bleu"). Pourquoi ?
Réveillez-vous, pourquoi ?
Olivia : parce-que c'était le plus petit, on a mis 9, le moyen on a mis 6 et le très grand 3.
M : Et pourquoi ? J. Baptiste pourquoi ?
Louison Jean-Baptiste : le 3 était le plus facile pour lancer la boule.
Coralie: le plus facile c'était le 0.
M : Pourquoi ?
Eric : c'était toute la cour autour de la cible.
M : On avait joué à quelque chose. Qu'est-ce qu'on avait fait ? Patrick
Patrick: un relais(*)
M : un relais ! ça fait longtemps. La maîtresse avait fait une cible. Qu'est-ce qu'il y avait dans cette cible ?

(*) Il s'agit de la situation "course" qui a précédé le jeu de cible

Suit une (re)description de la cible et des coups permis où interviennent des nouveaux élèves sollicités par la maîtresse ou pas : Valérie, Lidia, Franck.

M : On pouvait marquer 0, 3, 6 ou 9
Quel était votre premier travail. Il fallait s'organiser. Qu'est-ce que vous faisiez en équipe ?
Mathieu : on a fait un tableau
J. Baptiste : pour marquer les temps, non les points
M : Vous avez préparé chacun votre petit tableau pour écrire vos points. Voilà
Eric : On n'a fait qu'un tableau
M : qu'un tableau ?
Eric : un tableau pour toute l'équipe
M : pour toute l'équipe. Et puis nous sommes allés sur le terrain. Et qu'est-ce qu'on a fait ?
On avait le droit
le choeur: de lancer la balle 3 fois
M : et chaque fois qu'on lançait la balle ?
Jean-Charles : on a marqué le nombre qu'on avait fait.
M : Voilà, regardez. J'ai reporté au tableau, voyez par équipe, vos points.
Quelles sont toutes les questions que vous pouvez vous poser ?
Camilo : L'équipe qui a perdu
Bastien : l'équipe qui a gagné
Isabelle : les équipes qui sont égales
M : bon, l'équipe qui a perdu, les équipes qui sont égales. Bon. Dépêchez-vous. On peut en chercher des choses.
Valérie : les équipes qui sont pareilles
M : pareil , quoi ?
Valérie : pareil-pareil 9 - 9
M : tu veux dire, ceux qui sont dans chaque équipe ont tiré les mêmes points en tirant les 3 fois. Bon, très bien. Ça c'est intéressant. Sandrine ? Qu'est-ce qu'on peut

faire encore ? Lidia ?

Lidia : On prend le plus petit
M : Comment le plus petit ?
Lidia : On prend 6, 6 > 5 alors c'est 6
M : Y a pas de 5 au tableau
Lidia : Ah ! 6
M : (...) Ah bon, un point de plus que l'autre
Gilles : On peut regarder dans l'équipe ceux qui ont les mêmes nombres.
M : Ah, ceux qui ont fait le même nombre de points
Gilles : dans une rangée, ceux qui ont le même nombre
M : Très bien
Grégoire : Ceux qui ont fait 3 fois le même nombre
Bastien : 3 pour aller à 6 3
6 pour aller à 9 3
Tu l'as pas fait par hasard
M : Toi, t'es un petit malin, toi !
C'est quelque chose à retenir. C'est vrai (bis)
Vous comprenez ce qu'il veut dire
0 + 3, 3, +3, 6, +3 ,9
C'est un petit malin.
M : Quelles sont les remarques, les questions que vous pouvez poser ? Valérie ? Je n'entends pas Laurent. Camilo
Qu'est-ce qui a d'autres questions à se poser ? vite.
Coralie : Dans toutes les équipes, on pourrait voir ceux qui ont gagné, perdu
M : Çà bien sûr
Valérie : sans perdre ou gagner, celui qui a le plus de points dans l'équipe
M : (bis) Valérie
Valérie : ou celui qui est égal
M : Bon, oui et alors ?
Eric se rapproche du tableau d'Olivia en l'observant
"Ceux-là ont 3 - 3 (Christian, Marc désignés)
Sauf celui-là, il a 3 et 3 = 6

Pointant la dernière colonne
"Ceux-là sont égal, 3 et 3, 6 et 3 9"
Tous ceux-là ont fait 3, sauf celui-ci il fait 6, autrement ...
M : Olivia a fait 3 aussi ?
Eric : non celui-là compte pas parce que c'est un 0.
Christophe a fait que 3 parce que là il y a deux 0 et Marc aussi. Sauf Yannick, parce que là 3 et 3 6.

Brouhaha ....
On note E les élèves dont on n'arrive pas à repérer l'identité
E : On enlève un 3, on le met à Olivia
Eric : Je sais qui a gagné là dedans : ceux-là n'ont fait que des 0 (1ère rangée) 6 et 3, c'est 6 qui a gagné
M : Là, c'est facile, tu veux dire que dans cette équipe, c'est facile de voir qui a gagné, c'est Yannick qui a marqué le plus de points. Bon, c'est vrai.
Patrick : Pour voir les autres équipes, il faudrait marquer combien çà fait en tout
M : Il faudrait le marquer ! on va voir, on va essayer.
On cherche pour l'instant, après on va travailler.
Encore des questions ? Franck, tu as quelque chose à dire ?
Franck : On trouve pas tellement ceux qui z'ont gagné, parce y a des 0 dans les équipes.
M : Çà te gêne qu'il y ait des 0 ?
Franck : non, mais on sait pas laquelle qui a perdu.
Eric : Dans l'équipe d'Olivia, je sais qui a perdu, c'est Olivia.
M : C'est Olivia. Et dans l'équipe de Mathieu ?
E : C'est Jean-Charles
M : et dans l'équipe de Bastien ?
E : Louison
M : et dans les autres équipes on peut pas savoir ?
On verra

Grégoire : On peut voir celui qui a le plus de 0.
E : C'est celle d'Olivia, elle a perdu
M : Alors l'équipe qui a perdu c'est celle qui a le plus de 0 ? Ah bon.
Grégoire : il y a que des 0 et des 3. 3 c'est le fort. (sous-entendu de l'équipe)
M : Ecoutez bien, il y a que des 0 et des 3 et c'est le fort. Alors on est sûr que c'est l'équipe qui a perdu.
Isabelle : L'équipe Kamel a gagné parce qu'il y a qu'un 0.
M : bis
Olivia : là y a trois 0, là aussi, y en a trois là aussi !
M : Dans Grégoire aussi, alors, Frédérique ; pourquoi il te semble que c'est celle-là ?
Isabelle : celle-là a gagné parce qui y en a beaucoup qui sont forts
M : qui sont forts ? parce qu'ils ont fait quoi ?
Isabelle : y a des 6 et des 9
M : bis. Mais regarde celle de Bastien
Grégoire : on peut voir celle qui a le plus de 9. Elle a gagné.
M : Ah bon ! on peut savoir celle qui a gagné, on peut voir celle qui a le plus de 9. Pourquoi cà ?
E : Les 9, c'est les plus forts. C'est pas celle-là en tout cas (indiquant celle d'Olivia)
M : C'est pas celle d'Olivia. Pourquoi à votre avis ? Valérie.
Valérie : parce qu'elle a plus de 0 que les autres.
Grégoire : celle-là a des 0 et des 3 et les 3 c'est pas tellement fort.
M : des 0 et des 3. Bon après nous allons parler de celle de Mathieu. Qu'est-ce que vous pouvez me dire de celle de Mathieu ?
Mathieu : elle n'a pas un seul 9.
M : Ah bon !
E : elle n'a pas un seul 9 mais elle a des 6 ?
M : elle est avant ou après celle d'Olivia ?
E : avant.

M : Pourquoi ?
Grégoire : Elle est avant l'équipe d'Olivia, elle a un 6 et elle a moins de 0 que celle d'Olivia.
M : Bon. Elle a des 3 aussi.
Grégoire : quand même, les 6 c'est fort, ça fait deux 3.
M : Qu'est-ce que ça veut dire qu'un 6 ça fait deux 3.
Gilles : 3 et 3 ça fait 6.
Eric se précipitant au tableau :
"Dans l'équipe de Yannick, y a deux 3 alors ça doit faire 6".
E : il y a encore deux trois dans l'équipe ça fait 6
Eric : Yannick, il n'a que deux 3, il n'en a pas quatre. Je parle que de Yannick
M : Bien, dans toute l'équipe, il y a quatre 3. Et dans l'équipe de Mathieu, combien y a de 3 ?
E : Dans l'équipe de Mathieu, ils ont autant de 3 et ils ont un 6, ils ont gagné.
M : Ah ! ils ont le même nombre de 3, mais ils ont un 6 de plus, alors ils ont gagné ! Bon.
Grégoire : on prend les deux 6, non 3 et 3 6 et encore 3 et 3, 6 ça fait deux 6.
M : Bon, regardons maintenant. Ecoutez bien Grégoire, l'équipe qui a gagné, c'est celle qui a le plus de 9. Alors à votre avis, quelle est l'équipe qui a gagné ?
Gilles : c'est pas forcé. Un 6 et un 3 ça fait aussi un 9.
M : Ah, c'est vrai.
Coralie : un 6 et un 3, ça fait 9.
M : Alors à votre avis qui a gagné ? .
Grégoire : C'est l'équipe de Bastien qui a gagné.
M : toi tu crois que c'est l'équipe de Bastien. Pourquoi ? Patrick ?
Patrick : parce que y a plus de 9, y a des 6 et y a moins de 0.
M : mais Gilles te dit:"attention" !
J.Charles: oui 6 et 3 ça fait 9

M : D'accord, alors ça fait déjà quatre là.
Hélène, dans ton équipe ?

Hélène, au tableau compte les 9 de son équipe :
6 et 3 9, encore 6 et 3 9, alors on a quatre 9

M : Alors, elle, elle a quatre 9.
Est-ce que vous pouvez dans chaque équipe trouver combien il y a de 9 ? cherchez ! Allez, chacun dans son équipe cherche combien il y a de 9. On va voir.

Gilles : on peut faire des 9 avec que des 3. Kamel indique du doigt à Gilles, un autre 9 de l'équipe.

Brouhaha sur les manières d'obtenir 9.

M : chacun va aller les écrire.

Phase de travail individuel, puis reprise de la phase collective.

M : ça y est ? Vous les avez faits vos 9 ?
Jacques !

Jacques (dont on n'entend jamais un son et dont on voit rarement un écrit) lève un doigt pour indiquer <u>un</u> 9.

M : Vous êtes d'accord ?

Jacques lève 2 doigts pour indiquer <u>deux</u> 9.

M : viens les montrer.

Jacques désigne dans son tableau.

Jacques : 0 3 6 9
Franck : 0 6 3 9
M;et Sandrine (0 6 0) et Meziane (0 6 0)

Gilles : <u>on prend deux 6, on enlève 3 ça fait 9</u>. J'en enlève 3 d'un 6 et ça fait 9.

FIN DE LA 1ère BANDE REPRISE AVEC UN DECALAGE

les élèves choisissent un signe pour "paquets". Après diverses propositions, ils décident d'adopter □.

A propos de l'équipe de Jacques

Gilles : il y a 3 paquets de 9 et encore 3

M : viens écrire au tableau ce que tu viens de dire

Gilles écrit 3 p9 + 3 et lit "3 paquets de 9 + 3"

M : pour moi 9 + 3 = 12. Tu as 3 paquets de 12

Gilles : "non." Il ajoute des parenthèses :
(3p 9) + 3
puis après propositions et choix du signe :
(3□ 9) + 3

Brouhaha

M : d'accord, tu veux en retirer 6 de là pour en mettre là, tu en as toujours 3.
L'équipe d'Olivia, combien trouvez-vous de paquets de 9.
Combien en as-tu trouvé ?

Yannick : 1

M : 1 paquet de 9, bon ! Olivia, combien tu en trouves.

Olivia : 1
: C'est tout, 1 paquet de 9 tout juste

Eric : moi je trouve qu'il y en a un de 6.

M Marc, combien ?

Marc : il n'y a qu'un paquet de 9

Yannick : + 3
Ah, 1 paquet de 9 plus 3.

Yannick écrit : (1 □ 9) + 3

M : Kamel , le compliqué, combien en as-tu trouvé ?

Kamel : 5

Gilles en trouve 4

Virginie en trouve 3

Frédérique en trouve 5. La maîtresse l'oblige à compter les paquets un par un et à marquer le résultat (5 □ 9) + 3

- C'est le tour de Laurent, Valérie, Isabelle, Camilo
(4 □ 9). Laurent explique le calcul.

- Tour de Bastien, Patrick, Jean-Baptiste, Frédéric (Louison)

M : Combien avez-vous de paquets de 9. Bastien, Louison,
Patrick, cherchez les autres.
Bastien, à ton avis

Bastien : 3 □ 9

M : 3 □ 9, c'est tout, êtes-vous sûr ?
Les élèves : oui, non

Patrick : 4 □ 9

Louison : je crois 5

Frédérique : moi aussi, je crois 5

M à Patrick : viens ici, entoure les paquets de 9
Patrick entoure les 9 et les groupements 6 et 3.
Il reste 6 6 en disposition diagonale.

M : Cherchez, qui a une idée

Grégoire : -3, on n'a qu'à mettre -3
Grégoire au tableau note -3 à côté du 6

6
6 -3

M : Qu'est-ce que ça fait 6 6 - 3

Grégoire : Il reste 3

M : Il faudrait qu'on le voit ce 3 qui va nous rester

Grégoire : là (il indique le 3 du 6 - 3)

M : est-ce qu'on le voit très très bien ce 3, est-ce que
vous êtes d'accord ?
Si je compte ça fait 6 et 3, ça fait 9
Là je dis 6 et 6 le chœur de la classe 12

M : 12 - 3 ça fait 9 ça marche ?
Les élèves : oui

M : On peut le laisser alors. Et le 3 qui va nous rester ?
Et pour savoir où il est l'autre 3.
Grégoire répète : 6 et 3 ça fait 9

M : ça fait 9, d'accord. Comment on va savoir qu'il nous
reste + 3 (bis)

Grégoire : Le 3 qui est là, on va le mettre là

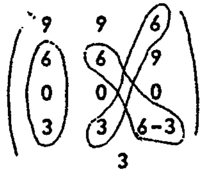
M : mets le (...) voyons comment

Grégoire efface le 6 du 6 - 3 entouré

M : écris le à côté plutôt, voilà.

Grégoire : je le mets là

M : Mets-le, voyons un peu
D'où il sort ce 3 là (bis)



Grégoire écrit un petit 3 à l'extérieur du groupement
M : Ah le 3 sort dessous
Grégoire indique le 3 du 6-3 et dit : il y a 3 là.

Olivia : il n'y a qu'à faire une flèche

M : et bien, fait une flèche
Olivia veut tracer une flèche du 6 - 3 au 3
M l'arrête

M : écris le à côté
M refait à côté le dessin 6 6

Olivia l'entoure comme dans le tableau et veut
écrire -3 en dehors de 6 6

M efface le 6 : tu veux remettre - 3

M : tu veux écrire autre chose, continue, ça ne fait rien.
On va voir après, écris

J.B. écrit 3 + 3 = (6 - 3)

M : Qu'est-ce que tu as écrit là? est-ce que c'est vrai ?
c'est vrai ou c'est faux ?
(s'adressant à J.B.) 6 - 3 J.B. 3

M : Alors est-ce que c'est vrai ce que tu as écrit ?

J.B. : oui

M : est-ce que ton <u>écriture</u> est juste ?

J.B. : ?

M : 3 + 3 J.B. 6 M. écris-le J.B. 3 + 3 = 6

M : est-ce que tu peux écrire 3 + 3 = 6 - 3

J.B. : non, si on m'en retire 3, il va m'en rester 3.

M : 6 n'est pas égal à 3, c'est faux.

maintenant qu'est-ce que tu voulais nous dire ? On comprend bien pourquoi tu l'avais écrit. Qui veut l'aider, pourquoi il avait écrit çà.

A la place de 6, qu'est ce que tu voulais mettre

J.B. : 3 + 3 ... , il écrit $\overset{6}{3 + 3}$

Mi : voilà, à la place de 6 il a mis 3 + 3

Olivia proteste

M : Ah bon, bon !

Olivia reprend

6
6
-3

M : : Ah bon ! c'est bien -3. Qu'est-ce que ça veut dire alors ? C'est le 3 que tu as enlevé? Mais le 3 qui nous reste, où tu vas le mettre ?

Qu'est-ce qui a une autre idée ? (bis)

J. Baptiste : je voulais écrire (il a la craie en main)

: Toi, tu avais dit d'où il venait le 6 ?

Moi, je savais que çà venait de 3 parce que 3 et 3   6.

M : et bien, écris le. Au lieu d'écrire 6 tu voulais écrire 3 + 3

J. Baptiste écrit 3 + 3 = 6 - (il reste un moment la craie en l'air)

M : Vas-y

J. Baptiste a envie d'écrire -3. Il dit :

"Je ne crois pas que ça va aller".

M : çà fait rien, vas-y ... on va voir.

J. Baptiste écrit à côté de 3 + 3 plus loin 6 - 3

M : entoure le paquet de 9

J.B. : j'ai un peu réfléchi

6
3 + 3

M : Combien de paquets de 9 alors pour l'équipe

J.B. : (6 □ 9) + 3

Puis Mathieu écrit pour son équipe (2 □ 9) + 0

M récapitule les résultats

Jacques	(3 □ 9) + 3	Bastien	(6 □ 9) + 3
Grégoire	(5 □ 9) + 3	Mathieu	(2 □ 9) + 0
Laurent	(4 □ 9) + 0	Olivia	(1 □ 9) + 3
Gilles	(5 □ 9) + 3		

Jeu du 27/4

Les marques des différentes équipes

scores

Jacques	0	3	6	Olivia	0	0	0
Sandrine	0	6	0	Christophe	0	0	3
Franck	0	6	3	Marc	0	0	3
Meziane	0	6	0	Yannick	0	3	3
Laurent	6	3	6	Grégoire	0	9	3
Valérie	0	3	0	Eric	9	3	3
Isabelle	3	3	0	Hélène	3	6	0
Camilo	0	3	9	Coralie	0	6	6
Bastien	9	9	6	Kamel	6	9	0
Patrick	6	6	9	Gilles	3	6	9
J.Baptiste	0	0	0	Virginie	3	0	3
Frédéric	3	3	6	Frédérique	6	0	3
Mathieu	3	3	0				
Lidia	0	0	3				
J.Charles	0	0	0				
David	3	0	6				

Jacques	(3 □ 9) + 3
Olivia	(1 □ 9) + 3
Laurent	(4 □ 9) + 0
Grégoire	(5 □ 9) + 3
Bastien	(6 □ 9) + 3
Kamel	(5 □ 9) + 3
Mathieu	(2 □ 9) + 0

Analyse de la séquence du 27/4

A. Phase collective

Côté Maîtresse	Côté élèves
I Description du jeu.	
M: Pourquoi un tableau? C'est un appel aux données du problème.	Hélène: Pour mettre combien on a fait. Suit une description de la cible et de sa marque. Interviennent: Hélène, Eric, Olivia, J.-Baptiste, Coralie. Redescription de la cible et des coups permis par d'autres élèves.
M: Qu'est-ce qu'on avait fait? Par cette seconde question, la maîtresse provoque la diffusion des données parmi l'ensemble des élèves.	Précision d'Eric: On n'a fait qu'un tableau pour toute l'équipe.
M. relance la question: Qu'est-ce qu'on a fait?	Le Choeur, dans son ensemble, reprend les informations précédentes.
La maîtresse, assurée de la diffusion, passe à une autre étape.	
II Appel aux questions.	
M: J'ai reporté au tableau, par équipe, vos points. Quelles sont toutes les questions que vous pouvez vous poser?	Camilo, Bastien, Isabelle, Valérie, Gilles, Grégoire, Eric, Sandrine, posent des questions diverses portant sur la comparaison d'équipes ou sur les joueurs à l'intérieur d'une équipe.
M: Lidia?	Lidia: $6 > 5$, alors c'est 6 . Lidia reçoit la question non pas dans le contexte du jeu, mais comme une interpellation sur ses connaissances numériques.

III Un changement de cadres "jeu — Numérique", déclenché par Bastien.

Une remarque purement numérique de Bastien démonte la construction du jeu par la maîtresse.
3 — 6 , 3 ;
6 — 9 , 3 ; "pas par hasard".

M: T'es un petit malin. Vous comprenez?
0 + 3 , 3 ; + 3 , 6 ; + 3 , 9 .
C'est quelque chose à retenir.
M. pointe un élément mathématique qui, pour elle, doit avoir des conséquences.
M. appelle de nouvelles questions. Elle interpelle Valérie, Laurent, Camillo.

Autres questions de Coralie, Valérie.

IV M. oriente la discussion.
Et alors?

Les premiers éléments de réponse font apparaître 3 comme unité de compte.
C'est une idée d'Eric, qui l'exploite pour comparer les joueurs de l'équipe d'Olivia.
Une autre idée, de Patrick – totaliser les points – n'est pas reprise.

M. ne veut pas entendre cette proposition, mais ne veut pas non plus la rejeter. Elle choisit de la laisser en suspens: "On cherche pour l'instant, après on va travailler".
– Encore des questions? Franck?

Franck répond en exprimant son incertitude: on ne sait laquelle qui a perdu.
Eric: Dans l'équipe d'Olivia, je sais: Ceux-là n'ont fait que des zéros, 6 et 3 , c'est 6 qui a gagné.

M. saisit cette première réponse pour résoudre une série de questions: Et dans l'équipe Mathieu, ...,et dans l'équipe Bastien..., et dans les autres équipes, on peut pas savoir?

A cette dernière question, Grégoire répond: On peut voir celui qui a le plus de 0 .
Cette remarque fait dévier un élève sur l'examen des équipes (sans doute par confusion). "C'est celle d'Olivia, elle a perdu".

V Une conjecture.

M. énonce alors une conjecture en donnant un caractère général à une déclaration prenant son sens pour une équipe précise:
Alors, l'équipe qui a perdu c'est celle qui a le plus de 0 ?
M. reprend l'argument.

V Des éléments de justification.

Grégoire: il y a que des 0 et des 3 .
Isabelle, tirant les conséquences: L'équipe Kamel a gagné, y a qu'un 0 .
Olivia rejette l'argument par un contre-exemple: Là, il y a trois 0 , là aussi, là aussi.
Autrement dit, on ne peut pas ramener la comparaison des équipes au décompte des zéros. Elle le prouve en exhibant des équipes non ex-aequo qui ont autant de 0 .

VI Nouvelle orientation.

Isabelle entend la réfutation et modifie son argument: Celle là a gagné parce qu'il y en a beaucoup qui sont forts.

M: Ils sont forts? Parce qu'ils ont fait quoi?

Isabelle: Des 6 et des 9 .
Grégoire énonce une proposition: On peut voir celle qui a le plus de 9 , elle a gagné.

M. soutient cette proposition pour provoquer la comparaison de deux équipes: une nouvelle, celle de Mathieu, une déjà examinée, celle d'Olivia.

Les deux tableaux sont décortiqués en termes de 3 , 6 , 9 . Ce qui donne: "Même nombre de 3 , un 6 de plus, l'équipe Mathieu est avant celle d'Olivia".

M. relance: Ecoutez bien Grégoire: "l'équipe qui a gagné, c'est celle qui a le plus de 9 ".

Gilles rejette l'énoncé de la maîtresse: C'est pas forcé, un 6 et un 3 , ça fait aussi un 9 .
Coralie répète: Un 6 et un 3 , ça fait 9 .
Gilles: On peut faire des 9 que avec des 3 .

B. Phase individuelle.

M: Chacun va aller écrire ses 9 .

Travail individuel, mais avec concertation dans l'équipe avant d'aller en rendre compte au bilan collectif.

C. Bilan collectif

1) On compte les 9 .

1)

M. interroge Jacques (dont on n'entend jamais un son et dont on voit rarement un écrit)

Jacques répond: en levant 1 doigt pour un 9 , puis 2 doigts pour deux 9 .

L'ambiguïté à propos des 9 soulevée par Gilles se retrouve ici.

Gilles intervient pour grouper deux 6 et conclure: 3 paquets de 9 et encore 3 .
C'est le langage de la numération parallèlement en cours d'étude.

2) M. sollicite une écriture.

Familiarisation avec le calcul.

2) Elaboration d'un signe pour "paquet":

et d'écritures du type (n □ 9) + r .

3) M. appelle chaque équipe à tour de rôle à exposer son calcul.

3)
Un membre de l'équipe explique son calcul, et éventuellement se fait aider ou relayer par un autre de l'équipe ou extérieur à l'équipe.
Chaque calcul sert d'apprentissage au suivant, ou de renforcement.

La transformation Tableaux —— Ecriture numérique fonctionne bien tant que les 9 sont obtenus par assemblage.

4) Une difficulté inattendue pour M. avec l'équipe Bastien. Celle-ci comprend 4 membres, et 3 propositions de résultats différentes: (4 □ 9), (3 □ 9), (5 □ 9); restent 6 , 6 .

4) Que faire quand il reste deux 6 ?
La question s'est déjà posée et Gilles l'a résolue par une procédure sous-tendue par le jeu: " 3 paquets de 9 et encore 3 ".

M. tente de jouer sur l'écriture pour obtenir 6 + 6 = 9 + 3 , i.e. un traitement numérique des informations:
– Il faudrait qu'on le voie, ce 3 qui va nous rester.
– Est-ce qu'on le voit très très bien?
– 6 et 3 , ça fait 9 ; là je dis 6 et 6 ...
– ...
– Comment on va savoir qu'il reste +3 ?

Pour les joueurs, le problème est de compter les 9 . La règle qui donne l'équipe gagnante est "celle qui a le plus de 9 a gagné". Le 3 n'est pas dans leur préoccupation. La maîtresse et les élèves se situent dans des cadres étrangers, ce qui entraîne une incompréhension, bien qu'ils disposent de toutes les connaissances numériques nécessaires.

Grégoire: 6 et 6 , on n'a qu'à mettre -3 . Puis il écrit:

6
6 - 3
3

Olivia: Y a qu'à mettre une flèche.
J.-Baptiste tente une formulation de type égalité numérique, mais il veut un 3 .

Il s'ensuit une petite épreuve de force entre M. et Grégoire, puis Olivia.

M: Ah! au lieu de 6 , tu voulais écrire 3 + 3 .
Et encore, à propos de 3 + 3 = 6 - 3 :
– Est-ce que ton écriture est juste?
– 6 n'est pas égal à 3 , c'est faux.
Et enfin:
– Voilà, à la place de 6 , il a mis 3 + 3 .

Les élèves dialoguent entre le jeu et la représentation. La maîtresse entre la représentation et les nombres. La situation est bloquée. La maîtresse ne veut ni dire, ni faire ce qu'elle veut que les élèves fassent d'eux-mêmes, et dont la production serait pour elle l'indice d'un progrès.

M: 3 + 3 ? J.-Baptiste: 6 . M: Ecris le. Est-ce que tu peux écrire $3+3 = 6-3$? J.-Baptiste: Non.	La situation se débloque quand Jean-Baptiste, cédant à la pression, se place au plan purement numérique " $3+3 = 6$ ", et "si on m'en retire 3 il va m'en rester 3 ". Enfin, dans le diagramme $\begin{matrix}6\\6\end{matrix}$, il remplace un 6 par $3+3$ pour obtenir $\begin{matrix}6\\3+3\end{matrix}$ en disant "j'ai un peu réfléchi".
M: Voilà! - Combien de paquets de 9 alors pour l'équipe?	Le basculement est réalisé. La technique ne manque à personne et très vite les résultats sont récapitulés sous forme numérique. Dans l'écriture $(2 \square 9)+0$, le 0 correspond à une information du tableau.

Séance du 29 Avril

Cette séance n'a pas été observée.

On sait ce qui s'est passé par les rappels que les élèves font de la séance du 3 Mai, par des documents d'élèves et les informations de M.

1) Le problème posé était de comparer les scores des 2 équipes.

- Chaque équipe dispose d'une feuille sur laquelle tous les scores sont notés. Elle doit classer les équipes de la plus forte à la plus faible.

- Toutes utilisent la même procédure de comparaison : de deux équipes, la plus forte est celle qui a le plus de 9. Si 2 équipes ont le même nombre de paquets de 9, on regarde combien elles ont de points en plus. Dans toutes les équipes, on doit trouver le même ordre :

- Pour écrire les comparaisons, les écritures numériques étaient trop lourdes. Ils ont décidé de nommer les scores. Ils ont choisi la première lettre du mot désignant le nombre de paquets de 9. Par exemple $T = (3 \square 9) + 3$ Sauf pour les équipes ex aequo à qui ils ont attribué C et P.

2) Chercher combien l'équipe forte a de plus que la faible.
Combien la faible a de moins que la forte ?

En fait, à la demande de la maîtresse, ils ont tous calculé l'écart de P à Q. Ils en ont calculé d'autres à leur choix en plus. Certains se sont heurtés alors au problème de soustraction à retenue.

Rappelons les scores :

$S = (6 \square 9) + 3$
$D = (2 \square 9) + 0$
$U = (1 \square 9) + 3$
$C = P = (5 \square 9) + 3$
$T = (3 \square 9) + 3$
$Q = (4 \square 9) + 0$

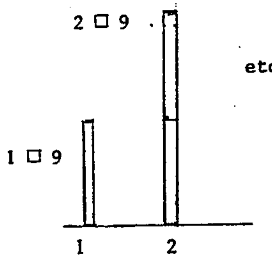
3) Une autre représentation des scores

a) La maitresse propose une autre représentation des scores par des baguettes découpées dans du papier quadrillé.

Le choix collectif est le suivant : on découpe des bandes d'un carreau de large, on prend autant de carreaux qu'il y a de points, on fabrique des baguettes de 9. Notons que ce choix est un réinvestissement du travail de numération fait auparavant.

b) Une procédure de comparaison pour D et U : pour D ils collent bout à bout 2 baguettes. Ils posent dessus 1 baguette de 9, convenablement, ils comptent encore 3 points pour représenter U et voient de combien D dépasse.

c) Ce n'est pas commode de manipuler des baguettes qui, mises bout à bout, peuvent devenir très longues. Ils décident de les coller sur une feuille en les alignant bien dans l'ordre pour faciliter la comparaison.



etc....

. Pour comparer D et U, les baguettes sont voisines, ça va. Pour T et Q aussi. Pour les autres ce n'est pas commode.

On verra plus tard.

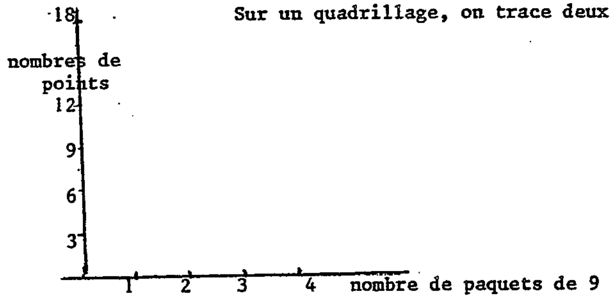
Soulignons que tous ces éléments de représentation sont introduits comme jalons pour une reprise et une exploitation ultérieure.

le 30 Avril.

Réinvestissement d'une connaissance antérieure

. Dans la représentation "baguette" des points, il y a 2 types d'informations : le nombre de paquets de 9 représentés et le nombre de points. On peut représenter graphiquement cette double information.

C'est une reprise d'une représentation utilisée dans une course de relais (à laquelle Patrick et d'autres ont fait allusion dans leurs interventions sur le jeu de cibles).



Sur un quadrillage, on trace deux axes .

Mais Bastien précise que dans le jeu on ne peut faire que des 3, et, qu'il est inutile de marquer les autres nombres. Il propose de graduer l'axe vertical de 3 en 3.

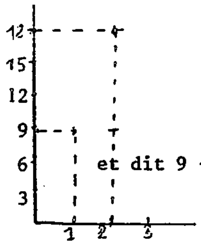
Pour Bastien au moins, la représentation est bien en dialectique avec le jeu.

ANALYSE DE LA SEQUENCE

DU 3 MAI

A. Phase collective

I. Rappel 1) Questions	
M interroge Jacques, Yannick, Franck Grégoire	? Grégoire répond. Jacques reprend. Coralie complète.
M ponctue les phrases des élèves	- Suit , par plusieurs élèves, une description de la cible, des coups permis, du retour en classe, de la constitution des tableaux, de leur traitement. Ils rappellent quelques questions Grégoire : Celui qui aurait le plus de 9 aura gagné - Justifications de Coralie, Olivia, d'autres élèves. - Grégoire : on a fabriqué des 9
M : L'équipe de Jacques avait ?	E : (3 □ 9) + 3
que voulait dire le signe □ ?	Le choeur rappelle le score de chaque équipe, la signification de "□" Isabelle : on avait vu que l'équipe de Grégoire et l'équipe de Gilles, ils étaient pareils.
M en réponse à Isabelle : "Pourquoi Laurent"	Laurent répond : mêmes signes, mêmes nombres, mêmes points.
M a le souci de la diffusion des idées	
M : mais tous les paquets vous ennuyait	"On a donné des signes" Isabelle, Kamel, Olivia, d'autres élèves rappellent la convention des signes Olivia fait allusion aux restes - "des fois les gagnants ils avaient 0 les perdants + 3 ça nous avait ennuyés"
M : pour les classer, ça n'a pas été difficile, qui était l'équipe gagnante ?	Frédérique fournit une réponse en numération ordinaire : Bastien, 57
M revient à la convention de la classe 6 □ 9 + 3 Puis elle demande de "calculer"	Patrick lit un graphique affiché



et dit 9 + 9 = 18

2) Calcul Un des objectifs d'apprentissage est en jeu ici : 57 = (5 × 10) + 7
Comment passer de (6 □ 9) + 3 à 57.
La maîtresse attire l'attention des élèves dessus.

M . entame une phase de calcul et fait appel à plusieurs manières de calculer des sommes de 9.	Yannick : 1 point pour aller à 10 et il en reste 8 10 et 8 18 Olivia : 9 + 10 = 19 19 - 1 = 18 Kamel : 19 + 9 = 27 .... Isabelle, Jean Charles, Eric, Louison, Valérie calculent jusqu'à 63
M garde le contrôle du calcul en le rapportant au jeu "On est arrivé à 7 paquets"	Les élèves ont un programme qui tourne bien, ils pourraient le faire marcher plus loin.
3) Classement des équipes M : nous avons classé tous les points. le 1er......	3) Franck, Coralie, David, Hélène, Jean-Charles, Olivia, Bastien, Gilles et d'autres interviennent pour exprimer tous leurs calculs d'écarts
4) Organisation des informations M : Avec tous ces renseignements on ne savait plus y voir clair	4) Yannick : on a fait un tableau

	P	T	Q	C	S	D	U
P							
T							
.							
.							
.							
.							

M fait marquer 0 dans les cases diagonales pour les distinguer des cases "perdantes"	Ils ont reporté leurs résultats et ensuite calculé les écarts manquants. Ils se sont interrogés sur les cases diagonales. Franck : S et S, elle est vide, c'est égal. on voit sur le tableau qui avait "égal". Ils ont laissé vides les cases (X,Y) avec X < Y. Yannick : U est l'équipe perdante , elle n'a rien dans sa ligne

II. Nouvelle consigne

1) M : Dans une autre classe, ils ont fait le même jeu. Une équipe a gagné 33 points.
Combien cette équipe a marqué de paquets de 9 ?

M à Camilo : combien 3 ☐ 9

M : et alors 33

2) M : où le situer

M : elle a compté là.dessus.

3) Qui a une autre méthode

M rejette. "ça ne veut rien dire ici 5"

4) M donne un nouveau message 39 pts

III. Une nouvelle manche : même règle du jeu

II.

1) Gilles, Camillo, Hélène, Grégoire lèvent la main.
Camilo propose 3 paquets de 9

Camilo : 27

Camilo : ça dépend des isolés
7 - 6 - 6 Plusieurs déclarent 6 - 6

2) Argument d'Isabelle : "j'ai compté les points"
Elle a devant elle, un axe gradué de 3 en 3. Elle indique les carreaux du quadrillage entre 27 et 33.
Bastien décrit : "c'est gradué en 3," et argumente : "3 et 3 6." Coralie fait écho.

Frédérique : 5 et 1 6
Frédérique reçoit la question comme "une autre manière de faire 6"

Coralie reprend la pratique de numération
27 pour aller à 30 3
30 " " 33 3 3 et 3 6
Jean-Charles répète le même calcul comme s'il le découvrait.

Valérie et d'autres utilisent les méthodes précédentes : calculs et graphique.
Gilles a une façon personnelle
39 = 30 + 9 → 1 paquet
30 = 3 × 10 = 3 ☐ 9 + 3
ça fait 4 ☐ 9 et 3 isolés
Toutes les méthodes doivent mener au même résultat, chacune sert de contrôle à l'autre.

M : Vous avez une feuille par équipe.
Préparez-la pour marquer vos points.

Un élève : on va déjà faire le tableau

Pour la maîtresse, comme pour les élèves, cette deuxième manche est une routine

une situation de renforcement

Mieux jouer maintenant qu'on est habile

Reprise de la séquence l'après-midi
à la demande des enfants

Travail en équipes

M les laisse travailler

. Ils veulent savoir combien ils ont fait à la 2ème manche, s'ils ont été meilleurs qu'à la 1ère manche, quelle est l'équipe gagnante etc.... Ils ne veulent pas attendre le lendemain.

BILAN COLLECTIF

Eric : 1ère manche (5 ☐ 9) + 3
2ème manche (4 ☐ 9) + 6
il déclare : 3 isolés de plus qu'avant
Contrôle graphique : 6 de moins !
- il ajoute : ça fait 42.
- il faut défaire un paquet.
Franck propose de compter les 0 dans chaque équipe (retour en arrière)

M demande de comparer 2 équipes
Jacques et Bastien
"Combien de plus ?"

Réponse : 9 + 6 = 15

Sandrine compare son nouveau score à l'ancien en comptant les paquets de 9.
(3 ☐ 9) + 3 (1ère) (7 ☐ 9) + 6 (2ème)
mieux joué
Elle calcule "le mieux" en disant
4 et 3 7 alors 4 paquets de 9 de plus et 3 isolés
Sandrine utilise correctement la première formulation.

M : qui a gagné ?

Olivia : tout de suite on ne sait pas, il faut compter tous les paquets de 9.

M : On fera demain le classement général.

Jacques cherche ses paquets de 9 (malgré le calcul de Sandrine qui est dans son équipe)

Les relations entre "paquets de 9 et paquets de 10" diffusent lentement.

Jeu du 3/5

Les scores de la deuxième manche

Jacques	9	9	9
Sandrine	6	0	6
Franck	6	6	6
Méziane	3	0	9
Olivia	6	0	3
Christophe	0	0	0
Marc	6	3	3
Yannick	6	3	6
Grégoire	0	0	3
Eric	0	3	3
Hélène	0	6	3
Coralie	9	6	9
Mathieu	6	9	6
Lidia	0	0	0
Jean-Charles	0	3	0
David	3	3	3

Bastien	0	3	6
Patrick	6	0	3
Jean Baptiste	9	3	6
Frédéric	6	9	3
Laurent	6	0	6
Valérie	6	6	9
Isabelle	6	3	0
Camilo	3	6	3
Kamel	6	6	6
Gilles	6	0	0
Virginie	0	0	6
Frédérique	0	3	0

Séance du 4/5

I. Rappels : 1) Ils rappellent le jeu, les tableaux pour marquer les points, la règle de comparaison - celui qui a le plus de 9 - Mais, attention 3, 3, 3 ça fait 9, et 6 et 3 9.

Tout cela prend 4 minutes.

2) Combien de points d'écart :

- Ils expliquent pour cela les transformations des paquets de 9 en paquets de 10.
- Ils signalent le problème du calcul de l'écart quand dans le score faible le reste est + 3 et dans le fort, le reste est 0. Ils rappellent la procédure : en prendre 3 d'un paquet, il en reste 6.

3) Construction d'un tableau "a en plus"

- On voit la perdante : il n'y a rien dans sa ligne.
- On voit la gagnante : elle a toujours plus que les autres.

II. Nouvelle consigne sur un thème connu :

- . On reçoit un message d'une autre classe, 51 points. Comment le situer parmi nos résultats.
- . La lecture graphique fournit immédiatement la réponse et aussi le nombre de paquets de 9 dans 51 que M. demande de contrôler par le calcul. La dialectique fonctionne entre le cadre graphique et le cadre numérique.

III. Phase de renforcement :

L'exploitation des résultats de la 2ème manche fait l'objet de la fin de la séance.

- Chaque équipe complète le travail entamé la veille. Chacun compte le nombre de paquets de 9 de chaque équipe à la 2ème manche. Pour noter tous les résultats, on a besoin de désigner les scores.

- Le choix est décidé en commun : on met un indice au score de la 1ère manche ; par exemple, T pour la 1ère manche T_1 pour la 2ème manche.

- M. collecte les résultats au tableau

		Pour mémoire
Jacques	$T_1 = (7 \square 9) + 6$	$T = (3 \square 9) + 3$
Laurent	$Q_1 = (6 \square 9) + 0$	$Q = (4 \square 9) + 0$
Grégoire	$C_1 = (4 \square 9) + 6$	$C = (5 \square 9) + 3$
Bastien	$S_1 = (6 \square 9) + 0$	$S = (6 \square 9) + 3$
Mathieu	$D_1 = (3 \square 9) + 6$	$D = (2 \square 9) + 0$
Olivia	$U_1 = (4 \square 9) + 0$	$U = (1 \square 9) + 3$
Gilles	$P_1 = (3 \square 9) + 6$	$P = (5 \square 9) + 3$

Au vu des résultats, les remarques fusent :

Eric : $Q = U_1$ Patrick : $Q_1 = S_1$ Eric : $Q_1 \neq U_1$

E : $Q_1 = U_1 + 2 \square 9$ $Q_1 > U_1$

$P_1 = D_1$ .....

IV. Nouvelle consigne.

M : chacun va chercher combien il a de plus que la semaine dernière. Voir le compte rendu des travaux des élèves.

Séance du 7/5

Dans cette séance, la maîtresse fait une reprise systématique des résultats de la veille.

1. Auparavant, elle donne un moment aux élèves qui le veulent, pour terminer les calculs de la veille ou en faire d'autres.

2. Bilan et institutionnalisation.

   . Chaque équipe annonce la différence entre ses scores aux 2 manches en paquets de 9 et la traduit en expression numérique "au pays des 10".

   . On rappelle le sens des signes $<$, $>$.

   . La classe est appelée pour contrôler les propositions de résultats de l'équipe au tableau, et éventuellement pour l'aider en cas de difficulté. Toutes les méthodes : calculs, graphiques, paquets, baguettes sont permises et sollicitées. Elles servent de contrôle mutuel.

   . Le programme de calcul est formulé explicitement pour la soustraction à retenue sous la forme :
   "On prend d'un paquet" "on défait un paquet", les termes "soustraction" ou "retenue" ne sont pas employés.

Séance du 10/5

I. La première partie de la séance est un travail individuel. Il s'agit de faire le point pour chacun.

Consigne : On veut faire le classement général.
Chacun totalise les points de son équipe à la 1ère et à la 2ème manche.

La maîtresse adjoint des exercices à cette consigne en rapport avec le jeu.

Additionner 1)

$\square$	× $\boxed{9}$
3	6
4	6

2)

$\square$	× $\boxed{9}$
2	8
4	5

3) $\begin{array}{r} 38 \\ +\ \underline{26} \end{array}$ ou une autre du même type selon l'élève

II. La deuxième partie de la séance est consacrée à un bilan.
Il s'agit d'un contrôle collectif des résultats qui sert d'appui à un travail systématique de numération.

Chaque équipe totalise ses points aux deux manches et les exprime de deux manières : en paquets de 9 et sous forme standard. Tous les résultats sont affichés au tableau, écrits en base 9 et en base dix (l'écriture en base 9 n'était pas prévue, la maîtresse a trouvé là l'occasion de faire pratiquer un apprentissage antérieur, et de mettre l'accent sur l'aspect conventionnel de l'écriture des nombres : un même nombre de points s'écrit avec 3 chiffres en base neuf et 2 chiffres en base dix).

Exemple de calculs :

Olivia

	$\boxed{9}$ 1	x
U	1	3
+ U_1	4	0
U_2	5	3

1	2
3	6
4	8

Jacques $T + T_1 = T_2$

$(3 \square 9) + 3 + (7 \square 9) + 6 = (11 \square 9) + 0 = 1\ 2\ 0$ $\boxed{99}$

B I L A N

Bastien

$S = (6 \square 9) + 3$

$S_1 = (6 \square 9) + 0$

$S > S_1$ $S_2 = (12 \square 9) + 3$ $\boxed{1.1\ 1}$

$S = S_1 + 3$ $1\ 3\ 3$

Mathieu

$D = (2 \square 9) + 0$

$D_1 = (3 \square 9) + 6$

$D_1 > D$ $D_2 = (5 \square 9) + 6$ $\boxed{5\ 1}$

$D_1 = D + (1 \square 9) + 6$

Olivia

$U = (1 \square 9) + 3$

$U_1 = (4 \square 9) + 0$

$U_1 > U$ $\qquad U_2 = (5 \square 9) + 3$ $\qquad \boxed{4\ 8}$

$U_1 = U + (2 \square 9) + 6$ $\qquad 5\ 3$

Gilles

$P = (5 \square 9) + 3$

$P_1 = (3 \square 9) + 6$

$P > P_1$ $\qquad P_2 = (9 \square 9) + 0$ $\qquad \boxed{8\ 1}$

$P = P_1 + (1 \square 9) + 6$

$\quad = P_1 + (2 \square 9) - 3$ $\qquad 1\ 0\ 0$

Jacques

$T = (3 \square 9) + 3$

$T_1 = (7 \square 9) + 6$

$T_1 = T + (4 \square 9) + 3$ $\qquad T_1 > T$

$T + T_1 = T_2 = (11 \square 9) + 0$ $\qquad \boxed{9\ 9}$

$1\ 2\ 0$

Laurent

$Q = (4 \square 9) + 0$

$Q_1 = (6 \square 9) + 0$

$Q_1 = Q + (2 \square 9)$ $\qquad Q_1 > Q$

$Q_2 = (10 \square 9) + 0$ $\qquad \boxed{9\ 0}$

$1\ 1\ 0$

Grégoire

$C = (5 \square 9) + 3$

$C_1 = (4 \square 9) + 6$

$C > C_1$ $\qquad C_2 = (10 \square 9) + 0$ $\qquad \boxed{9\ 0}$

$C = C_1 + 6$

$C_1 = C - 6$ $\qquad 1\ 1\ 0$

$$\boxed{\begin{array}{c} 111 > 99 > 90 > 81 > 51 > 48 \\ 90 \end{array}}$$

Séquence du 11 Mai: Chronique analysée,

Phase collective.

I Rappels.

1) Cadre matériel.

M. Rappelez ce vous avez fait depuis le début

1) Données.

* Description de la cible.
* La règle du jeu.

2) Cadre de la représentation.

2) Représentation.

Explication des tableaux.

" des signes P , U , D , etc.

Un signe pout "paquets": .

Traitement des données.

M. Un signe pour "paquet".

Pourquoi des paquets de 9 ?

– Les 9 , c'était les plus forts.

Isabelle: On pouvait marquer que des 9 .

Valérie: Et aussi des 6 et des 3 .

Olivia: Et aussi des 3 , 3 , 3 .

Gilles: Et aussi des 6 et des 6 .

Le vocabulaire fait appel au jeu: "marquer". Mais le thème est numérique: il s'agit des différentes manières d'obtenir 9 à partir de 3 et 6 .

3) Cadre numérique.

M., à Gilles: Alors, avec deux 6 ?

3)

Gilles: J'enlevais un 3 d'un 6 , j'en gardais un, j'en mettais un avec un 6 , ça faisait 9 .

– Je le mettais avec les autres, à côté.

La réponse de Gilles la rassure.

M. Voilà, et l'autre?

– Rappel des questions que les élèves ont posé, ou que M. a posé.

– M., en les rappelant, regroupe les questions qui sont importantes du point de vue de l'apprentissage. "Quand on s'est demandé qui est le plus grand, on s'est posé une autre question".

La proximité est conceptuelle. Si $a < b$, on peut calculer c tel que $a + c = b$

M.: Voilà (bis).

Hélène comprend très bien l'appel: "Ah oui, combien le plus grand a de plus de paquets que les autres?"

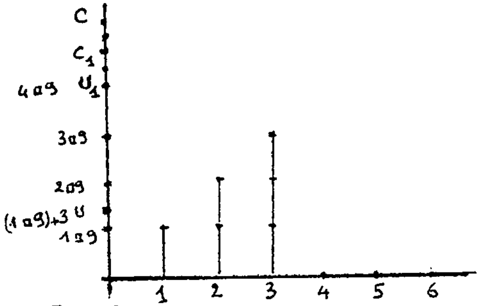
E: On l'a fait pour tous.

.M. ponctue

4) Représentation graphique.

M.: Qu'est ce qu'on s'est amusé à faire sur cette liste?

Et même on s'est amusé à avoir une autre... (geste vers le graphique)



Tous les scores C, C_1, U, U_1, ... sont portés sur l'axe vertical.

5)
.M. n'intervient pas

6) Retour au numérique.
avec le problème de la retenue.

M: Qu'est ce qu'il avait fallu faire?

M: Voilà. On ne s'est pas arrêté là. On a dit: On va faire une 2e manche.

Bastien: Et combien le dernier avait de moins que les autres.
E: On a calculé en points.
Le choeur: En paquets de 10 .

4)

E: ici, c'était les paquets.
E: Et ici les points.
(avec gestes explicatifs vers le graphique affiché).

E: Des scores de la classe et d'une autre classe.
E: Combien ils avaient de paquets de 9 et d'isolés.

5)
E: On a même fait le tableau.
Rappel du tableau des comparaisons des scores 2 à 2 .

6)
Olivia: Aussi le gagnant il avait +0 , le perdant avait +3 . Ça nous avait bien ennuyé.

Hélène: Voir les paquets de 9 .
Bastien: prendre 3 dans les paquets de 9 .

7) Dialectique Représentation - Numérique.
M: Qu'est ce qu'on a cherché pour chaque équipe?

M: A quoi avons-nous joué Samedi matin (8 mai).

- Les baguettes de la 1e semaine et les baguettes de la 2e semaine.
- Qu'est-ce qu'on a marqué?

7)

Jean-Baptiste: Le plus grand nombre de 9 : le plus grand nombre de points.
* Rappel des points de la 1e manche et de la 2e manche. Tous les résultats sont affichés.

E: Tu nous a donné une feuille quadrillée, on a fait des baguettes.

E: On les a comparés.
E: $P > P_1$, $U_1 > U$, etc.

Au tableau sont ordonnés du plus grand au plus petit des nombres écrits en base 10 . Ce sont les scores globaux réalisés aux 2 manches par les équipes. Coralie lit un certain nombre de résultats des équipes, elle lit aussi des comparaisons de scores d'une même équipe aux deux manches, des égalités $C = C_1 + 6$, etc.

M., suivant Grégoire, reprend:
On a voulu savoir dans les 2 manches.
M: Qu'est-ce qu'il fallait faire?

M: On a donné un signe au nombre de points du classement général.
Jacques?

M: Vous avez dit: la baguette P_2

M: On s'est amusé.
M: On a réuni tous les paquets de 9 de P , de P_1 . On a eu des ennuis.

Grégoire: On a compté les points des 2 parties.

E: Qu'est-ce qu'on a marqué de points!
Hélène: On prenait une baguette et une autre baguette au bout..
(Il n'y a pas d'ambiguïté pour Hélène).
Olivia: Comme ça, on pouvait savoir qui avait gagné.

Un élève répond: P_2 , Q_2 , etc...
et la signification.
E: est égale à la baguette P et la baguette P_1 .

E: Après, on a trouvé une technique. Il fallait aller à la banque.

Notons le vocabulaire utilisé par M selon les tâches: "amusé", "joué", quand il s'agit de représentations – baguettes ou graphiques; "cherché", "savoir", "ennuis", quand le numérique est concerné.

M: Quand on avait 6 points isolés et 6 points isolés...

E: 12 points isolés, 1 rondelle rouge et 3 isolés.

M: Voilà. Et avec les baguettes de 9, il nous est arrivé d'en avoir 10.

Kamel: Fallait aller à la banque. On avait une rondelle bleue.

M: Pour avoir une rondelle bleue, qu'est-ce qu'il fallait?

Le Choeur: 9 rondelles rouges.

M: Et si on avait 10 rondelles rouges?

Olivia: On n'en donnait pas 10. On en donnait 9 et on en gardait 1.

M: Comment on écrit ce nombre là, au pays des... en baguettes de 9 points?

Olivia: 1 . 1 . 0 .

9)

9) Retour au contexte
par Coralie: On a fait quelque chose 1 1 0 et 1 1 0.
E: Des ex-aequo.
Isabelle: On n'avait pas les mêmes points, mais on est arrivé au même total.

M. suit Coralie et Isabelle:
L'un avait 409, 609;
l'autre (509) + 3, (409)+6.

Olivia: 6 et 3, ça fait 9.
Yannick: Dans notre équipe, on n'a pas eu de plaquettes.
Bastien: Parce qu'ils n'ont pas eu 9 rondelles rouges.

M: Et pourquoi?

(I dure 21 minutes)

II Nouveau jeu
Même cible, nouvelle règle.

1)
M. énonce la règle du jeu à 18 points.

1) Prévisions pour gagner.
Hélène: 9, 9, 0, 0.
Eric: 9, 3, 3, 3.
Kamel: 9, 6, 3, 0.
Frédéric: On est 2, on fait 9 chacun.

M: On va préparer une feuille. Vous marquerez vos points prévus.

2)
M: Qui n'a pas compris la consigne? Mettez-vous là.

2) Réception du problème.

Viennent Marc, Méziane, Lidia, Sandrine, Frédérique, Bastien (farceur).

M. fait répéter la consigne à Méziane, à Marc.

Kamel explique correctement. Méziane n'a pas compris, Marc la répète.
Bastien prévoit 3, 3, 3, 3, 3, 3.

M. lui rappelle la consigne: 1 lancer chacun, 4 dans l'équipe.

(La phase II dure 3 minutes).

III Le jeu.

Les enfants vont jouer leur partie dans la cour.

IV Compte rendu du jeu

1) Compte-rendu par chaque équipe.

1)
Chaque joueur a les points obtenus par son équipe en tête. Rien n'est noté. Il s'agit de retenir 4 nombres petits.
Tous n'ont pas fait de prévision.
Eq. Bastien-Patrick-Louison-Frédéric:
Patrick: On a gagné, on a fait 9, 9, 0, 0.

M: Ah bon? On va marquer.
Elle note au tableau les résultats de l'équipe de Bastien.

Eq. Grégoire-Coralie-Eric-Hélène.
1^{er} compte-rendu.
Coralie: Hélène a fait exprès de faire 0 .

M: Tu es maladroite !

Hélène: Non, si j'avais fait 3 , on n'aurait pas gagné, on aurait fait plus.

M: Pourquoi?

Hélène: Parce que comme on sait que 6 et 3 ça fait 9 , on avait déjà un 9 , j'ai fait exprès un 0 pour ne pas perdre.

M: Voilà (bis).
M. rappelle l'explication.
M: Comment vous-êtes vous organisés?

Grégoire réexplique la stratégie.

M., après le rappel du jeu de Grégoire et Coralie:
Vous vous êtes réunis?

Coralie: Oui, on a compté: 6 et 9 , de 9 pour aller jusqu'à 10 il faut 1 , et 5 ça fait 15 .

M: Tu as fait 6 et 9 , 15 .

Eric: après, on s'est dit, il en faut 3 .
* Pour Hélène, l'unité de compte est 3 .
Elle fait le 1^{er} compte-rendu de la stratégie, dans un langage proche du jeu.

A l'appel de la maîtresse,

Coralie et Eric font un 2^e compte-rendu en se plaçant dans le cadre numérique.

M: Et si Eric n'avait pas fait 3 ?

Hélène: On aurait perdu. Il aurait pu faire 0 et moi j'aurais fait 3 .

M: Et s'il avait fait 6 ?

Hélène: Ah non! on aurait perdu.

M: Pourquoi?

E: Ils auraient fait plus que 18 .

Les propriétés de l'addition, la compatibilité de l'ordre et de l'addition fonctionnent implicitement.

M. appelle à tour de rôle chacune des équipes pour rendre compte des prévisions et de la réalisation.

Equipe Bastien:
Patrick: J'ai fait 9 . Jean-Baptiste: 9 .
Frédéric (avec un sourire): J'ai fait 0 .
Bastien: 0 .
Coralie: Ils ont fait comme nous.

Equipe Olivia-Christophe-Marc-Yannick.
Olivia: On voulait faire 3 . J'ai fait 6 , Christophe 9 , ils voulaient faire 3 , ils ont fait 0 .

M: Est-ce que vous êtes gagnants?

Yannick: Non. On a 15 , il faut encore 3 .

Equipe Isabelle-Valérie-Camilo-Laurent:
6 , 6 , 3 , 6 .
Isabelle: Je voulais faire 3 , j'ai fait 6 .

M: Tu étais la dernière à tirer?

Oui.

Equipe Gilles:
– On a fait 12 .

M: Il en fallait ?

18 .

M: Il en fallait encore ?

6 .

M: Qui aurait pu les faire ?

– Moi (Gilles).
Au tableau, on complète: Virginie 6 , Frédérique 3 , Kamel 3 , Gilles 0 .

Equipe Mathieu-Lidia - J-Charles - David.
Mathieu dicte: 6 , 3 , 0 , 6 .

M: Est-ce qu'ils sont gagnants?

Laurent: Non. 6 et 3 , 9 ; 9 et 0 , 9 ; 9 et 6 , 15 .

M: Qu'est-ce qui manque?

Laurent: 3 .

M: Il aurait fallu +3 .

2)

2) Eric oriente vers une lecture des résultats.

Eric: Equipe Gilles, 6 , 3 , 3 , 0 ; équipe Mathieu, 6 , 3 , 0 , 6 . S'ils avaient 3 comme Gilles et si Gilles avait 6 , ils auraient gagné tous les deux.

E: Equipe Olivia 15 , équipe Mathieu 15 .
Coralie: Il fallait +3 à chacun .

M. suit l'orientation. Elle précise la dernière idée:
Ah! Ils ont le même nombre de points.

L'élément important devient l'écart à 18 , un indice pour ordonner les équipes.

Isabelle: Celui qui a le moins ou le plus, il a perdu (elle indique +6 , +3 , -3).
Celui qui a vraiment le plus, a perdu.

M. suit toujours: Ah oui! vous avez compris ce qu'elle veut dire?

Isabelle: Parce que 6 est plus grand que 3 et 6 est plus grand que 3 .

Elle indique successivement le défaut à 18 ,des équipes, noté
+6 pour Gilles qui avait 12 ,
+3 pour Olivia qui avait 15 ,
-3 pour Isabelle qui avait 21 .

M. traduit le discours d'Isabelle:
Elle veut dire que celui qui s'écarte le plus de 18 a perdu.

E: D'un côté ou de l'autre.

Une équipe n'a pas encore donné ses résultats.: Jacques.

Jacques annonce: 6 , 9 , 3 , 0 .
Patrick: Ils ont gagné: 6 et 3 , 9 ; 9 et 9 , 18 .
Isabelle: Ce n'est pas la seule équipe gagnante.

M. reprend: elle me dit que ce n'est pas la seule équipe gagnante.

Le Choeur: Equipe Hélène, équipe Jacques, équipe Bastien.
La perdante: Gilles.

3) M. relance la discussion sur les écarts.

M: Et ces deux, Olivia et Isabelle, qui est l'équipe gagnante, celle qui a +3 ou celle qui a -3 ?

Valérie: C'est +3 .

La formulation piège provoque le dérapage. C'est sans doute l'effet recherché. M., constamment préocuppée par son souci de diffusion, veut que les élèves reprennent à leur compte la remarque d'Isabelle.

M. Pourqoi? Réfléchissez!

Bastien: Ah non! c'est -3 .
(Il y a deux réponses possibles, si ce n'est pas l'une, c'est l'autre.)

M: Isabelle a dit quelquechose, tout à l'heure.

Isabelle: celui-là qui est le plus écarté.

M: Mais tu as dit "que ce soit en plus ou en moins".
(Ce n'est pas Isabelle qui l'a dit)

Hélène relit les écarts des deux équipes.
Olivia: Normalement, elles sont égales:
21 - 3 = 18 , 15 + 3 = 18 .

M: Ils ont la même erreur.

V Exploitation numérique,
de deux points de vue:

* renforcement.- On peut permuter l'ordre des termes d'un somme sans changer le résultat.
  - On peut substituer à une expression numérique une autre qui lui est égale.
* apprentissage: conséquence du point précédent, la multiplication comme addition itérée.

M: Est-ce que vous auriez pu avoir 18 par d'autres combinaisons?

Isabelle: ici, il a commencé par 9 , il aurait pu commencer par 3 .
Olivia: 3 + 3 + 3 + 9 .

M: D'accord?

Le Choeur: Oui!
J.-Baptiste: 3, 3, 3, 9 ; 9 et 9 , 18 .
E: 3 fois 3 , 9 .

M: Pourquoi "fois" ?

E: 3 "paquets" de 9 , c'est 3 fois 9 .
E: 9 + 6 + 3 + 0 , c'est pareil.

M: Voilà, c'est pareil.

Bastien: 3, 3, 3, 3, 3, 3.
E: 6 + 6 + 6 + 0 .

M: 6 et 6 ?

E: 12 .

M: et 6 ?

E: 18 .

M: On verra comment on peut ranger tous ces renseignements.

Plusieurs élèves: Tout à l'heure.

M: ou peut-être demain.

E: Non. Tout à l'heure!

M: Allez jouer maintenant.

FIN

Séquence du 18/5/76 .

Phase collective.

I Rappels.

1) M: Hier, nous avons joué à un nouveau jeu. Quelle était la consigne?

E: Mettre le plus près de 50 . Jeter 3 fois chacun.

M: Nous avons compté les points des équipes. Qu'avons-nous trouvé pour l'équipe d'Olivia?

Olivia: 9 en trop.
Valérie: 13 en trop.
Gilles: 15 en trop.
Grégoire: 18 en trop.

Il y a ambiguïté sur "en trop". Pour Valérie, $63 = 50 + 13$. Pour les autres, ce sont les points qu'ils n'auraient pas dû marquer pour être proches de 50 .

2) M: "En trop", qu'est-ce que ça veut dire?

Patrick: 13 de plus que 50 .
Kamel: 63 , etc... pour chaque équipe.

M: "En trop", c'est pas très mathématique. Qu'est-ce qu'on pourrait mettre pour dire "en trop"?

E: Un signe T, + .
Brouhaha, chacun propose son signe.

M: Ne parlez pas tous à la fois. On garde "en trop"! Que veut dire "en trop"?

Kamel: ils ont dépassé 50 .

Les élèves raisonnent et s'expriment dans le cadre du jeu, avec des nombres. M. veut les faire changer de cadre. Ils ne sont pas disposés à se situer dans le cadre numérique formel.

II

Pour cette séquence, M. s'est fixé deux objectifs.

a) Un entraînement au calcul.

Une familiarisation avec la numération.
La base de travail est donnée par l'ensemble des points marqués par chaque équipe, au jeu à 50 .

De quels calculs s'agit-il?
Les élèves, dans leur jeu, n'ont pas effectué leurs 3 lancers à la file, mais en 3 tours d'équipe.
Franck et son équipe ont calculé les points réalisés au 1^er^ tour, puis au 2^e^ tour.
D'autres ont refait les calculs autrement.
Il s'agit d'élèves sollicités par la maîtresse: Kamel, Patrick, Christophe, Franck, Sandrine, Yannick, Virginie.
Les calculs sont décortiqués. Il s'agit d'utiliser la numération: dizaines, unités, pour obtenir des procédures d'addition.

b) Un appel à la soustraction comme outil de résolution.
La situation est la recherche d'une stratégie gagnante pour le jeu à 50.

C'est là que se place la question de la maîtresse:

1) Est-ce que vous vous étiez donné des consignes? Est-ce qu'on pouvait gagner? Qu'est-ce qu'il fallait savoir?
M: Ah voilà!

Bastien: Combien de points il manquait.
Olivia: il fallait compter ces deux trucs là, ces deux nombres, $27 + 21 = 48$.
Ils étaient près.
Le choeur: Il fallait 2 .
Olivia: On peut pas faire 2 .

M: Qu'est-ce qui est le plus près, 48 ou 51 ?

Suit une discussion sur l'écart à 50 .

M. veut qu'ils calculent pour chaque équipe le dépassement à 50 .
M: J'ai demandé: combien de points ont-ils marqué en trop après 50 , des points qui dépassent 50 .
Vous avez bien compris la question?

La réponse fournie est le dépassement à 51 , puis, après protestation de la maîtresse, celui à 50 .
Chaque équipe fait son calcul. Chacun donne lieu à une formulation en termes de baguettes, isolés, banque, etc., puis unités, dizaines.

2) Retour au jeu et aux <u>scores possibles</u>.

M: Vous m'avez dit que l'équipe de Mathieu a gagné, mais l'équipe de Mathieu a 51 . Alors personne n'a gagné?	Le Choeur: Tu avais dit "le plus près de 50 ". Il y a plusieurs nombres près de 50 . Un élève: 49 et 51 .
M: 49 et 51 ?	Louison: Ils sont à côté de 50 . Valérie: 49 + 1 = 50 , 50 + 1 = 51 . Il y a 1 de différence.
M: Est-ce qu'on pouvait faire 49 ?	E: 49 , c'est -1 de 50 . Valérie: 48, on peut, et on n'a pas de 1 . Un élève: Pour faire 49 , il fallait faire 40 . Olivia: On pouvait pas faire 10 , on pouvait faire que des 9 . Un autre: 46 + 3 , et 46 on peut pas .
M: On ne peut pas faire 49 . Cherchez combien on aurait pu faire.	E: On peut "presque 40 , 42 ". Gilles: 39, on peut. E: On peut 45 , pas 46 , pas 47 , on peut 48 , pas 49 .

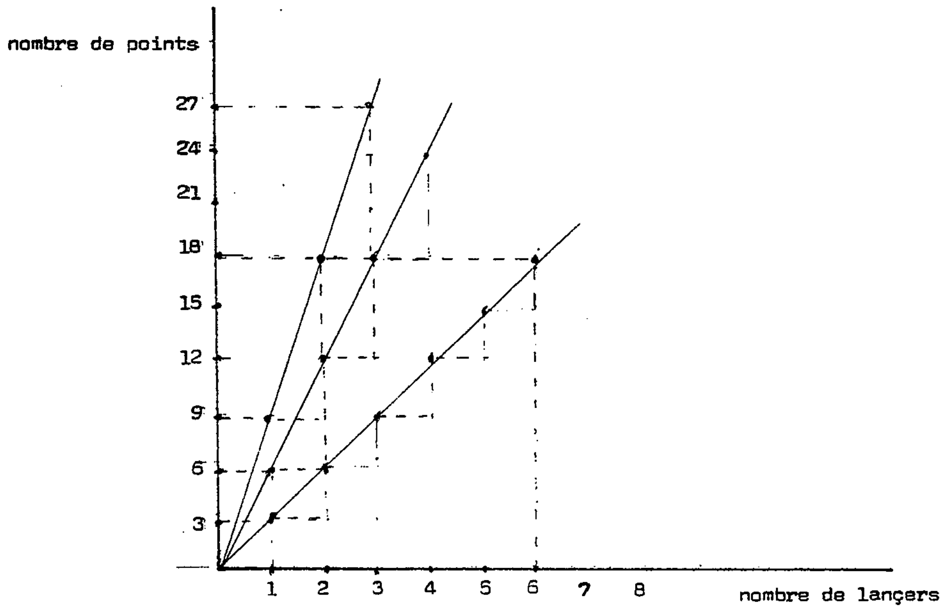
Fin de la séance.

21/5 Représentations graphiques.

Chaque élève représente sur un quadrillage individuel (maille de 1 cm de côté) gradué les couples (n , n × 3) représentant les scores réalisables en n lancers si on ne marque que des 3 . Chaque point est désigné par ses coordonnées: par exemple (6 , 18) ou (15 , 45) .

Collectivement, sur un grand quadrillage, les élèves représentent les couples (n , p) selon trois régles: "on ne fait que des 3 ", "on ne fait que des 6 " , "on ne fait que des 9 ". Sur la représntation, trois alignements de points apparaissent. On les matérialise par un trait. On exploite le graphique pour repérer des scores qu'on peut atteindre des 3 manières, des scores qu'on peut atteindre de 2 manières et des scores qu'on ne peut atteindre que d'une manière.

Après cela, les élèves s'en vont en classe de nature pour un mois.



C. Evaluation.

Introduction.

Nous présentons ci-après un compte rendu des travaux faits par les enfants au cours de 2 types d'épreuves.

- Les 29/4, 4/5 et 10/5, ils s'agit de travaux faits au cours du déroulement de la situation d'apprentissage et en rapport avec elle.

- le 17/5, il s'agit d'une épreuve décontextualisée, proposée en fin d'apprentissage. Les 24/9, 4/10 et 14/10 il s'agit du même type d'épreuves, quatre mois après l'apprentissage et après une période de vacances. Les 2 premières ont un caractère algébrique, la 3ème un caractère numérique.

L'épreuve du 14/5 a été passée par peu d'élèves. Toutefois, couplée avec celle du 17/5 (nous justifions plus loin ce couplage), elle nous permet d'augmenter la population des élèves évalués tout de suite après l'apprentissage.

Par ailleurs, l'institutionnalisation et le renforcement ont porté sur les points suivants :

1) la numération de position pour des nombres à 2 chiffres.

2) des procédures de calcul :
   - somme $a + b = x$
   - complément $a + x = b$

   en particulier le passage par la dizaine intermédiaire.

3) Une représentation de la procédure de calcul sous la forme :

$$\text{Etat} \xrightarrow{\text{Transformation}} \text{Etat}$$

Une pratique

- Ecriture d'équations de la forme $a + x = b$
  . où a et b sont connus, $a < b$ pour désigner ce qu'il faut ajouter à a pour obtenir un nombre égal à b.

Nous évaluons les élèves sur ces points à travers la tâche :
Trouver x tel que $27 + x = 80$ proposée le 17 Mai.

1. Liste des Epreuves en Mai 1976.

le 29/4 : Comparer les scores P et Q réalisés le 27/4.

. Calculer ce qu'il faut ajouter au plus petit pour qu'il soit égal au plus grand.

le 4/5 : Chacun cherche combien il a de plus que la semaine dernière (ou de moins)

le 10/5 : 1) Chacun additionne les points de 2 manches de son équipe

2) $$\begin{array}{cr|l} & \square & \overset{\boxed{9}}{x} \\ \hline & 3 & 6 \\ + & & \\ & 4 & 6 \\ \hline & & \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r|l} \square & \overset{\boxed{9}}{x} \\ \hline 2 & 8 \\ & \\ 4 & 5 \\ \hline & \end{array}$$ une addition subsidiaire

le 14/5 : voir texte en annexe.

le 17/5 : Trouver x tel que $27 + x = 80$

2. Le détail des travaux du 29 Avril 1976

Nous rapportons ci dessous les résultats des productions de 15 élèves (nous n'avons pas les autres), à la question suivante :

- comparer 2 scores
- calculer ce qu'il faut ajouter au plus petit pour qu'il soit égal au plus grand.

1) Pour P et Q
2) Pour d'autres nombres au choix.

Rappelons que $P = (5 \square 9) + 3$ $Q = (4 \square 9) + 0$.

Pour ces scores, il est possible de traiter séparément les "paquets de 9" et les restes et juxtaposer les résultats.

Sur 15 réponses; 13 sont correctes : $P = Q + (1 \square 9) + 3$.
Elles proviennent de Bastien, Eric, Franck, Frédérique, Gilles, Hélène, Kamel, Marc, Mathieu, Patrick, Valérie, Virginie, Yannick.

Coralie propose $P = Q + (1 \square 9)$ "oubliant" le reste

Sandrine est bloquée "1 + "

Parmi les 13 ayant produit une réponse correcte, trois n'en proposent pas d'autres : Marc-Virginie-Yannick auxquels s'ajoutent Coralie et Sandrine.

Détaillons le travail des autres

Bastien : $P = S + (1 \square 9)$ P et S sont échangés

Eric : $P = T + (2 \square 9)$

$S = P + (1 \square 9)$

$S = Q + (2 \square 9) + 3$

$S = T + (3 \square 9)$ tout juste

Franck : $S = U + (5 \square 9) + 3$ 3 en trop

Frédérique : $Q = T + (1 \square 9) + 3$ problème de retenue, Frédérique a écrit les décalages qu'elle "voit".

Gilles : $P = T + (2 \square 9)$

$P = U + (4 \square 9)$ les 2 justes

Hélène : $T = Q - (1 \square 9) + 3$ comme Frédérique, Hélène écrit les décalages mais avec plus de précision, en tenant compte de <u>l'écart</u> en points et du <u>sens</u> de l'écart.

$T = D + (1 \square 9) + 3$

$S = P +$ ———

$= C +$ ———

$= Q +$ ———

$= T +$ ———

$= D +$ ——— Elle calcule correctement tous les écarts.

Kamel : $S = P + (1 \square 9)$ juste

Mathieu : propose 3 égalités qu'il barre (notons qu'elles sont erronées).

Patrick : $S = C + (1 \square 9) + 3$ 3 en trop

Valérie : $C = Q + (1 \square 9) + 3$

$S = D + (4 \square 9) + 3$ juste,

mais aussi $S = U + (5 \square 9) + 3$

$S = P + (1 \square 9) + 3$ ce pourrait être par entraînement, car elle écrit aussi

$U < S + (5 \square 9)$ qu'on peut interpréter comme

U plus petit que S de $5 \square 9$.

En conclusion, nous observons une certaine aisance dans la manipulation des écritures même chez ceux qui éprouvent des difficultés à calculer les différences.

3. <u>Le détail du travail du 4 Mai 1976.</u>

Le travail du 4 Mai se présente pour 25 élèves avec plus ou moins de difficultés selon les scores. En effet pour certains, il faudra tenir compte d'une retenue dans l'opération, pour d'autres non et dans ce cas le problème est le même que celui du 29 Avril.

<u>*Les résultats*</u>★ : 1) 8 élèves se trouvent dans le 1er cas et fournissent une réponse correcte. Ce sont

Antonio P 48 $P > 1$ écriture incomplète sans doute

P_1 33 $1 \square 9 + 6$

Camilo $Q_1 = Q + 2 \square 9$

$U_1 = U + (2 \square 9) + 6$

Christophe $U_1 = U + (2 \square 9) + 6$

Eric $C + 3 = C_1 + (1 \square 9)$

$C = C_1 + (1 \square 9) - 3$

Grégoire $C = C_1 + (1 \square 9) - 3$

$C = 48 \quad C_1 = 42 \quad C > C_1$ de plus 6

Hélène $C = C_1 + (1 \square 9) - 3$

Kamel $P = P_1 + (1 \square 9) + 6$

$T_1 = T + (4 \square 9) + 3$

Yannick $U < U_1 + (2 \square 9) + 6$

. 4 élèves butent plus ou moins sur la difficulté
Gilles, Marc et Isabelle produisent des écritures incorrectes

Gilles $P_1 = P + (1 \square 9) + 6$ (échange entre P et P_1)

Isabelle $Q < Q_1 \quad Q_1 > Q \quad Q = Q_1 + (2 \square 9)$

$C > C_1 \quad C_1 = C + (1 \square 9) + 3$

$T_1 > T \quad T = T_1 + (4 \square 9) + 3$

Marc $U_1 > U \quad + (3 \square 9) + 6$

Virginie a écrit puis barré $P = P_1 + (2 \square 9) + 3$

★ Rappelons que les lettres P,Q,... désignent les scores réalisés le 27/4, les P_1, Q_1,... ceux réalisés le 3/5.

2) 7 élèves ne sont pas confrontés au problème, 3 parmi ceux-là fournissent une réponse correcte dans le cas simple et 4 produisent des écritures incorrectes.

Bastien $S_1 = S + 3$ Patrick $S_1 = S + 3$

Frédéric $S_1 = S + 3$

Mais pour Louison-Valérie $S = S_1 + 3$

pour Laurent $Q_1 = Q + 2 \square 9$

et Mathieu $D_1 > D$

$< (1 \square 9) + 6$

3) Coralie et Jacques n'écrivent qu'une inégalité :

Coralie $C > C_1$

Jacques $T_1 > T$

Toutefois, pour préciser son inégalité Coralie symbolise ses paquets de 9 par des points dans un rond et des croix pour les isolés (c'est la représentation dans le travail de numération). Mais elle ne mène pas sa représentation jusqu'au bout et n'apporte pas d'information supplémentaire.

4) Enfin, 4 élèves ne font que réécrire les scores. Ce sont Franck, Frédérique, Lidia, Méziane. Toutefois, Frédérique, comme Coralie, a essayé de représenter les paquets de 9 par des groupements de 9 points, mais sans efficacité.

Une dizaine d'élèves progressent très nettement dans la manipulation des groupements comme outil pour répondre à une question et pas seulement comme tâche en soi.

4. Le détail des travaux du 10 Mai 1976.

Il s'agit, dans ce travail, de s'appuyer sur les activités des élèves pour tester la disponibilité des écritures des nombres et celle de l'addition sur un champ numérique étendu.

La question I s'appuie sur le jeu lui-même. La difficulté réside dans la taille des nombres.

La question (II.1) concerne une opération, mais les nombres sont choisis parmi ceux du jeu, de taille moyenne.

Dans la question (II.2), il s'agit de nombres n'ayant pas de signification dans le jeu, mais écrits encore dans un système de groupements par 9. Dans la question (II.3), pour ceux qui y arrivent, il s'agit d'effectuer une addition ordinaire.

Nous présentons les performances par question, pour 16 élèves. Parmi ces élèves, Lidia est la seule à ne répondre à aucune question. Hormis Lidia, tous effectuent correctement l'addition (II.1), exceptés Grégoire et Jean-Baptiste (qui ne répondent pas). Mais compte-tenu des autres réponses qu'ils fournissent ((II.2) juste en particulier) on peut penser qu'il s'agit d'un oubli.

10 MAI : détail par question.

I. Addition des points des 2 manches

j Camilo-Gilles-Grégoire-Jean Charles- Laurent-Mathieu-Olivia-Valérie
(Camilo-Gilles en base 9, les autres en base 10)

faux ou non fait ou incomplet Antonio, Frédéric, Frédérique, Louison

unités correctes Bastien, Franck, Jacques

II.1)

$\square$	x
3	6
+4	6

j Antonio - Bastien - Camilo - Gilles - Franck - Frédéric - Frédérique - Jacques - Laurent - Mathieu - Olivia - Valérie

unités Jean Charles

non fait Louison - Grégoire

2)

$\square$	x
2	8
4	5

j Frédérique - Grégoire - Louison - Mathieu

3) une addition proposée en base 10, à ceux qui ont terminé les autres questions j Frédérique - Jean Charles - Louison Mathieu - Valérie

---

j veut dire juste

<u>Rien</u> Lidia

Tout fait juste : Mathieu - Olivia - Valérie

(II,2)(II,3) juste : Frédérique - Louison

<u>Détail des travaux d'enfants du 10 Mai</u>

	I	II 1)	2)	3)
Antonio	$P + P_1$ faux	j.	-	-
Bastien	$S + S_1$ j. (addition séparée des chaque colonne)	j.	-	-
Camilo	$Q + Q_1$ j.	j.	-	-
Franck	$T + T_1$ unités correctes	j.	-	-
Frédéric	$S + S_1$ écrit, non calculé	j.	-	-
Frédérique	-	j.	j.	j.
Gilles	$P + P_1$ j.	j.	-	-
Grégoire	$C + C_1$ j.	-	j.	-
Jacques	$T + T_A$ addition séparée dans chaque colonne	j.	-	-
J-Charles	$D + D_1$ en base 10	unités justes erreur de retenue		j.
Laurent	$Q + Q_1$ j.	j.	-	-
Lidia	-	-	-	-
Louison (Jean-Baptiste)	$S + S_1$ "paquets" de S et S_1 non regroupés	-	j.	j.
Mathieu	$D + D_1$ j.	j.	j.	j.
Olivia	$U + U_1$ j.	j.	j.	j.
Valérie	$Q + Q_1$ j.	j.	j.	j.

j = juste
\- = non fait

5. <u>Epreuve du 17 Mai 1976</u> passée par 19 élèves

<u>question</u> : $27 + x = 80$
que vaut x ?

5.1 <u>Interprétation</u> du problème par les élèves :

\- Comment aller de 27 à 80

5.2 Types de <u>procédures</u>

. Les représentations majoritairement utilisées sont du type

$$\text{Etat} \xrightarrow{\text{Transformation}} \text{Etat}$$

. Les étapes intermédiaires utilisent les dizaines :

$$\begin{tikzcd} & 30 \arrow[r, dash] & 50 \arrow[dr] & \\ 27 \arrow[ur, "3"] \arrow[rrr] & & & 80 \end{tikzcd} \qquad x = 53$$

$$\begin{tikzcd} & 50 \arrow[dr, "37"] & \\ 46 \arrow[ur, "4"] \arrow[rr] & & 87 \end{tikzcd} \qquad x = 41$$

ou

$$\begin{tikzcd} & 47 \arrow[dr, "40"] & \\ 46 \arrow[ur, "1"] \arrow[rr] & & 87 \end{tikzcd}$$

ou $46 \xrightarrow{4} 50 \xrightarrow{30} 80 \xrightarrow{7} 87$ $x = 41$

5.3 <u>Résultats</u>.

A ceux qui avaient résolu rapidement l'équation proposée, la maîtresse en proposait d'autres. Les élèves ont ainsi résolu un nombre différent d'équations.

a) <u>3 équations ou plus</u> avec une formulation de la procédure et du résultat témoignant d'une bonne maîtrise des outils appelés.

. Christophe	(3 éq)	. Coralie	(3 éq)
. Grégoire	(5 éq)	. Isabelle	(3 éq)
. Louison	(3 éq)	. Patrick	(3 éq)
. Virginie	(2 éq.+1)	. Yannick	(3 éq)

éq. = équation(s)

b) 2 équations

Les objectifs sont atteints séparément, la coordination demande un effort. Il s'en suit des essais, des ratures (Valérie) ou de nombreux intermédiaires (Gilles).

Leur travail est plus lent que celui des précédents.

c) 1 seule équation réussie avec traces de la procédure

Franck - Jean Charles - Marc - Kamel - Laurent

d) 0 équation

Mathieu : le problème est reçu comme "il faut aller de 27 à 80"

- le passage par 30 est noté
- l'écart de 30 à 80 est noté

tous les éléments ne se coordonnent pas pour fournir une réponse.

Pour Antonio il s'agit aussi d'aller de 27 à un nombre (?) ; x désigne bien une étape intermédiaire. Il lui attribue 60.

e) En échec complet : Lidia

bloquée à l'écriture : Sandrine

5.4 Utilisation de la couleur pour visualiser la position des chiffres dans l'écriture des nombres : bleu ou noir pour les unités, rouge pour les dizaines.

C'est la convention dans la classe. Elle est

- non utilisée par 3 "très bons"
  par 3 en difficulté, Mathieu, Lidia, Sandrine
- utilisée par les autres.
  3 transgressent, elle est manifestement inutile pour eux
  3 n'en comprennent pas l'utilisation

5.5 Le détail par enfant : nous précisons l'usage de la couleur pour l'écriture des nombres (couleur différente pour les dizaines et les unités).

Antonio 2 couleurs

$27 \xrightarrow{3} 30 \longrightarrow 10 \longrightarrow 40 \longrightarrow 10 \longrightarrow 50 \longrightarrow 10 \longrightarrow 60$

1 éq. réponse $x = 60$

ce qui fonctionne : le principe de la numération de position pour un nombre à 2 chiffres.

ce qui ne fonctionne pas : ce que désigne x exactement .

Christophe : $27 + x = 80$ en 1 couleur

tout le reste en 1 couleur $x = 53$

3 éq. $19 + x = 90$ $x = 71$

$46 + x = 87$ $x = 41$

Coralie en 2 couleurs

$27 + x = 80$ $27 \xrightarrow{3} 30 \xrightarrow{50} 80$ $x = 53$

3 éq. idem pour $19 + x = 90$

$46 + x = 87$

Franck $27 \xrightarrow{3} 30 \xrightarrow{50} 80$ 53 2 couleurs

$27 + x = 80$

1 éq. puis $27 \xrightarrow{3} 30 \xrightarrow{50} 80$ $x = 53$

puis pour $19 + x$ $19 \xrightarrow{10} 29 \longrightarrow 90$, $19 \longrightarrow 90$ sans réponse finale.

Gilles 1 couleur

$27 + x = 80$ x 53

2 éq. $27 \xrightarrow{3} 30 \xrightarrow{10} 40 \xrightarrow{10} 50 \xrightarrow{10} 60 \xrightarrow{} 70 \xrightarrow{} 80$ (10, 10)

puis dessous une écriture contractée $27 \xrightarrow{3} 30 \xrightarrow{20} 50 \xrightarrow{30} 80$

$19 + x = 90$ $x = 71$

$19 \xrightarrow{10} 20 \xrightarrow{60} 80 \xrightarrow{10} 90$

le premier 10 est sans doute écrit dans l'élan des 0 le résultat est bien 71.

Grégoire : 2 couleurs, respecte la règle, fonctionne très vite, résout 5 équations par le même procédé.

30
3 50
27 + x = 80

5 éq. x = 53

19 + x = 90

46 + x = 87

28 + x = 99

39 + x = 86

40
1 46
$39 \longrightarrow 86$

Isabelle 2 couleurs même procédé le passage à la dizaine

27 + x = 80

19 + x = 90

3 éq. 46 + x = 87

50
4 37
$46 \xrightarrow[41]{} 87$

Jean-Charles 1 couleur

27 + x = 80

1 éq. $27 \xrightarrow{3} 30 \longrightarrow 80$ x = 53

19 + x = 90

$19 \longrightarrow 20 \longrightarrow 90$ sans réponse

barré

Lidia (écrit le 4 de 4 Mai en rouge)

0 éq. puis $\overset{3}{27 + x} = 80$ 2 et 8 en rouge

et rien d'autre

Louison 2 couleurs

27 + x = 80

il ne représente que les intermédiaires

50
3 30 x = 53

3 éq. 19 + x = 90

70
1 20 x = 71

46 + x = 87

40
1 x = 41

ici passage par 47

Marc 27 + x = 80 2 couleurs

x = 53

$27 \xrightarrow[3]{30 \quad 53} 80$

1 éq. 19 + x = 90

x =

$19 \longrightarrow 90$ sans réponse

Kamel 27 + x = 80 2 couleurs

x = 53 1 couleur

1 éq. 27 3 10 $\longrightarrow$ 80
30 40

Laurent 27 + x = 80 = 53 2 couleurs

$27 \xrightarrow{30 \quad 50} 80$

1 éq. 19 + x = 90

$19 \longrightarrow 90$ sans réponse

Mathieu 27 + x = 80 1 couleur

0 éq. $27 \xrightarrow{30 \quad 50} 30$ sans réponse

Patrick 27 + x = 80 1 couleur

il pense à une soustraction

il pose $\begin{array}{r} - \ 27 \\ + \ \underline{80} \\ 7 \end{array}$ puis barre tout

et recommence $27 \longrightarrow 3 \longrightarrow 30 \longrightarrow 80$

3 éq.

en dessous $\quad \underline{3 \quad 30 \quad \overset{50}{\frown}}$ $\quad x = 53$

notant seulement l'état intermédiaire.

19 + x = 90 $\quad 19 \xrightarrow[\quad 20 \quad]{1 \quad 70} 90$

x = 71 $\quad$ 7 en rouge

46 + x = 87

$46 \xrightarrow{4} 50 \xrightarrow{30} 80 \xrightarrow{7} 87$

x = 41

Sandrine $\quad$ 1 couleur

27 + x = 80

0 éq. $\quad$ x = $\quad$ rien

Valérie $\quad$ 2 couleurs

27 + x = 80 $\quad$ x = raturé on ne peut pas lire

2 éq. $\quad$ en dessous $\quad 27 \xrightarrow[30]{3} 80$

19 + x = 90 $\quad$ x = 81 $\quad$ 1 tranformé en 0 puis le tout barré

puis $\quad 19 \xrightarrow{1} 20$

$19 \xrightarrow{1} 20 \xrightarrow{70} 90$ $\quad$ 0 transformé en 1

Virginie $\quad$ 2 couleurs, écrit en parallèle

27 + x = 80 $\quad$ 19 + x = 90 $\quad$ 46 + x = 87

2 éq. $\quad 27 \xrightarrow{3 \;\; 30 \;\; 50} 80$ $\quad 19 \xrightarrow{1 \;\; 20 \;\; 70} 90$ $\quad 46 \xrightarrow{4 \;\; 50} 87$

x = 53 $\quad$ x = 71 $\quad$ sans conclusion

Yannick $\quad$ 2 couleurs

27 + x = 80

$27 \xrightarrow{3 \;\; 30 \;\; 50} 80$

x = 53

3 éq. $\quad$ 19 + x = 90

même schéma que le précédent $\quad$ x = 71

$46 \xrightarrow{4} 50 \xrightarrow{37} 87$

x = 41

46 + x = 87

5.6. Soustraction avec retenue : évolution du 4 au 17 Mai

	14 élèves			évolution du 4/5 au 17/5
4/5	Antonio	P,P_1	j	↘
	Camilo	U,U_1	j	→
	Christophe	U,U_1	j	→
	Coralie	C,C_1	/	↗
	Eric	C,C_1	j	→
	Gilles	P,P_1	j	→
	Grégoire	C,C_1	j	→
	Hélène	C,C_1	j	→
	Isabelle	C,C_1	/	↗
	Kamel	P,P_1	j	→
	Marc	U,U_1	/	↗
	Valérie	C,C_1	/	↗
	Virginie	P,P_1	/ (mais barré)	↗
	Yannick	U,U_1	j	→

/ erreur partielle ou incorrection

17/5 $\quad$ 27 + x = 80

Coralie, Isabelle, Marc, Virginie, Valérie (au 3è essai) progressent.

absents le 4/5 performants le 17/5 Laurent - Louison - Patrick

absents le 4/5 non performants le 17/5 Franck - Lidia - Sandrine

5.7. Epreuve du 14 Mai

Elle a été passée par très peu d'élèves. Elle comprend des équations du type 27 + x = 80 et bien d'autres questions. Pour les élèves présents le 14 et le 17 Mai, nous observons une très bonne concordance des performances (cf.liste ci-jointe). Ceci nous permet de prévoir les résultats d'élèves présents le 14, absents le 17 à la question posée le 17 Mai et de considérer pour évaluer les élèves une épreuve fictive 14-17 Mai. Nous obtenons ainsi un groupe de 24 élèves.

- Présents le 14 et le 17 Mai

	14/5	17/5
Coralie	x	x
Gilles	x	x
Grégoire	x	x
Isabelle	x	x
Valérie	/	/
Yannick	x	x

/ partiellement réussi, x complètement réussi

- Absents le 17/5, présents le 14

	14/5	17/5 prolongé
Bastien	x	x
Camilo	x	x
Eric	x	x
Hélène	x	x
Olivia	x	x

adjoints à la 1ère catégorie du 17/5

6. Bilan de l'évaluation.

1) Les objectifs, comme outils explicites coordonnés sont atteints pour 15 élèves (10 par l'épreuve du 17, 5 par celle du 14 Mai) et ont statut de connu.

2) La coordination pose problème, il faut du temps pour qu'elle fonctionne correctement : 5 élèves

3) même problème qu'en 2) mais n'aboutissent pas : 2 élèves

4) Gênée par la complexité : 1 élève
bloquée à l'écriture : 1 élève

5) Se manifeste différemment selon la tâche : 3 élèves absents le 17/5

en 1)		en 2)	en 4)
Christophe	Virginie	Franck	Lidia
Coralie	Yannick	Jean-Charles	Sandrine
Gilles	Bastien	Kamel	
Grégoire	Camilo	Laurent	
Isabelle	Eric	Marc	en 5) Frédérique
Louison	Hélène	en 3) Antonio	Frédéric
Patrick	Olivia	Mathieu	Jacques
Valérie			

6. Evaluation des élèves dans le mois de la rentrée 1976-1977.

Nous mettons en annexe pour information la liste des épreuves. proposées aux élèves dans le mois de la rentrée. Comme nous n'avons pas tous les protocoles, nous n'en utiliserons qu'une partie pour l'évaluation "après les vacances". Nous retenons celle du 24/9 (21 élèves) celle du 4/10 (22 élèves) celle du 14/10 partie numérique (19 élèves). Nous regroupons pour chacune des épreuves, les erreurs en 3 catégories : 0 ou 1 erreur, entre 2 et 5 erreurs, plus de 5 erreurs ou une partie non faite. Par ailleurs nous donnons, sous forme de tableau, les performances de chaque élève à chacune des épreuves.

7.1. L'épreuve du 24/9.

Elle comporte 8 séries de calculs présentées sous forme de tableaux avec une consigne donnée sous forme algébrique

valeur de x			.... donnés
que vaut x - 3			.... ?
x - 2			?

Deux difficultés se présentaient : la masse du travail à faire (76 réponses demandées), et un piège à éviter. En effet, les séries sont couplées par deux ; la valeur de x est celle donnée. Or 3 enfants pour la série en 2ème position ont pris comme valeur de x celle qu'ils venaient de calculer. Nous les avons repérés par un point dans le tableau des performances, le nombre d'erreurs que nous indiquons ne tient pas compte de cette déviation.

Nous observons que, du point de vue numérique, les catégories d'enfants constituées en Mai, en gros se confirment :

. Camilo, Gilles, Virginie, Yannick toutefois ont des performances moins bonnes.

Mais c'est le début de l'année scolaire. Et de toute façon, 17 élèves sur 21 commettent 5 erreurs au plus.

7.2. L'épreuve du 4/10 :

Il s'agit essentiellement de tester la disponibilité du passage à la dizaine supérieure dans une formulation algébrique.
Exemple : $27 + a = 34$, $59 + a = 63$ etc...

Les élèves avaient à produire deux écritures de a, une sous-forme de différence $p - q$ et l'autre sous forme standard effectuée.

L'épreuve est massivement réussie : 19 sur 22 commettent au plus 1 erreur.

7.3. L'épreuve du 14/10 :

Il s'agit de 11 additions posées sous forme d'opérations, portant sur des nombres à 1, 2 ou 3 chiffres, comportant 2 ou 3 termes, avec ou sans retenue.

7.4. Résultats.

24/9	0 ou 1 erreur	entre 2 et 5 erreurs	plus de 5 erreurs ou partie non faite
	Bastien	Camilo	Antonio
	Grégoire	Christophe	Franck
	Hélène	Coralie	• Laurent
	Isabelle	• Gilles	Mathieu
	• Louison	Virginie	
	Olivia	Yannick	
	Valérie	Kamel	
	Marc	Sandrine	

4/10	0 ou 1 erreur		entre 2 et 5 erreurs	plus de 5 erreurs ou partie non faite
	Bastien	Virginie	Camilo	Frédéric
	Coralie	Yannick	Antonio	
	Gilles	Franck		
	Grégoire	Frédérique		
	Hélène	Kamel		
	Isabelle	Laurent		
	Louison	Marc		
	Olivia	Mathieu		
	Valérie	Patrick		
		Sandrine		

4/10				
	Bastien	Virginie	Antonio	Franck
	Christophe	Yannick	Kamel	Frédéric
	Coralie	Frédérique	Laurent	
	Louison	Marc	Lidia	
	Olivia	Patrick	Mathieu	
	Valérie	Sandrine		

Nous observons une reprise de la maîtrise opératoire attendue pour les élèves de la catégorie 1 et un progrès pour Mathieu, Sandrine et Frédérique.

Tableau des performances

	o ou 1 erreur	entre 2 et 5 erreurs	plus de 5 ou partie non faite
24/9 21 élèves	8/21	9/21	4/21
4/10 22 élèves	19/22	2/22	1/22
14/10 19 élèves	12/29	5/19	2/20

Les absents du 4/10 sont Grégoire, Hélène, Isabelle, des "bons" en principe. La comparaison des épreuves des 4/10 et 14/10 montre une meilleure aisance avec l'écriture littérale (en situation numérique simple) que dans la technique opératoire.

UNIVERSITE PARIS VII

THESE de DOCTORAT D'ETAT

SPECIALITE : **DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES**

PRESENTEE PAR: REGINE DOUADY

SUJET de la THESE : Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques.
- une réalisation dans tout le cursus primaire.

annexes

annexes

Table des matières des annexes

Nous avons indiqué entre parenthèses la nature de l'épreuve telle qu'elle est décrite en IV C 1.2.

ANNEXES

Annexe 1

Présentation des textes des épreuves par des travaux d'élèves:

14/5/76 , 16/9/76 , 20/9/76 , 24/9/76 , 2/10/76 , 4/10/76 , 14/10/76 , 17/12/76 , 6/1/77 , 7/1/77 , 8/1/77 , 5/2/77 , 30/4/77 , 22/9/77 , 3/11/77 , 5/12/77 , 23/1/78 , 10/2/78 , 6/3/78 , 13/3/78 .

A yannick ~~[illegible]~~ vendredi 14 mai CP

84 = 80 + x x = 4 86 = 80 + x x = 6 92 = 90 + x x = 2 95 = 90 + x x = 5

84 = 50 + x x = 34 86 = 40 + x x = 46 92 = 80 + x x = 12 95 = 40 + x x = 5~~0~~5

84 = 70 + x x = 14 86 = 30 + x x = 56 92 = 60 + x x = 32 95 = 70 + x x = 205

84 = 60 + x x = 24 86 = 20 + x x = 66 92 = 30 + x x = 62 95 = 50 + x x = 405

84 = 20 + 20 + 20 + 20 + x x = 4

que vaut a 87
que vaut b 89 90 91
86 < a < 88 < b < 92

89 < a < 92 < b < 95
a = 90 91 b = 93, 94

vrai ou faux

9 + 8 = 17 V
30 + 30 + 30 < 95 V
62 + 8 < 35 + 35 F
14 - 3 = 5 + 6 V
29 + 20 + 30 > 50 + 35 F

Si x = 4
8 + x = 12 V
x □ 4 = 16 V

réduis

3 + 1 + 4 + 70 = 78
5 + 3 + 1 + 80 = 89
4 + 2 + 2 + 90 = ~~99~~ 98
1 + 2 + 3 + 82 = 88
4 + 3 + 50 + 3 = 60
7 + 2 + 4 + 60 = 73
6 + 3 + 6 + 20 = 35
1 + 3 + 5 + 30 = 39
8 + 2 + 24 + 40 = 74
7 + 4 + 10 + 50 = 71
9 + 3 + 10 + 60 = 82

9 + 4 = 13
29 + 4 = 33
89 + 4 = 93
69 + 4 = 73

8 + 6 = 14
48 + 6 = 54
68 + 6 = 74
78 + 6 = 84

9 + 9 = 18
89 + 9 = 98
39 + 9 = 48
59 + 9 = 68

9 + 7 = 16
79 + 7 = 86
49 + 7 = 56
69 + 7 = 76

8 + 7 = 15
58 + 7 = 65
88 + 7 = 95
68 + 7 = 75
38 + 7 = 45

CP gilles lundi 17 mai 76

27 + x = 8~~8~~0 x = 53

27 30 40 50 60 70 80
3 10 10 10 10 10 ~~1~~ 10

27 30 50 80
3 20 30

19 + x = 90 x = 7~~0~~

19 20 80 90
10 60 10

46 + x = 87 x = 4 6 60 80 87
10 7

gilles jeudi 16 septembre 1976 CE1

que vaut x ?

$4 + x = 10$
$x = 6$
$3 + x = 10$
$x = 7$
A $1 + 2 + x + 4 = 10$
$x = 3$
$x + 6 + 2 = 10$
$x = 2$
$5 + x + 2 = 10$
$x = 3$
$4 + 3 + 1 + x = 10$
$x = 2$
$6 + x + 2 = 10$
$x = 2$
$3 + 5 + 1 + x = 10$
$x = 1$
$2 + 3 + x = 10$
$x = 5$
$x + 1 + 3 = 10$
$x = 6$
$4 + x + 5 = 10$
$x = 1$
$2 + x + 2 + 2 = 10$
$x = 4$
$3 + 3 + x + 3 = 10$
$x = 1$
$2 + 4 + 2 + x = 10$
$x = 2$
$x + 3 + 4 = 10$
$x = 3$

B
$10 + x = 12$
$x = 2$
$x + 5 + 5 = 15$
$x = \cancel{10}\ \cancel{1}\ 5$
$7 + 3 + x = 16$
$x\ \cancel{7}\ 6$
$4 + x + 6 = 13$
$x = 3$
$2 + 3 + x + 4 + 1 = 11$
$x = 1$
$3 + 3 + x + 2 + 2 = 14$
$x = \cancel{1}\ 4$
$4 + 3 + 3 + x = 19$
$x = 9$
$x + 5 + 3 + 2 = 17$
$x = 7$
$x + 3 + 6 + 1 = 18$
$x = \cancel{0}\ 8$
$5 + 2 + x + 2 + 1 = 20$
$x = \cancel{11}\ 10$
$x + 4 + 6 + 5 = 20$
$x = \cancel{15}\ 5$
$3 + 4 + x + 3 + 6 = 20$
$x = 4$
$1 + 9 + 7 + x = 20$
$x = 3$
$2 + x + 6 + 2 + 4 = 20$
$x = 6$
$4 + 3 + x + 3 + 2 = 20$
$x = 8$

lundi 17 mai CP
grégoire

$27 + x = 80$
30 50

$19 + x = 90$
1 20 $x = 53$ 70
$x = 71$

$46 + x = 87$
4 50 37
$x = 41$

~~34 + x = 90~~

$28 + x = 99$
2 30 69
71

$39 + x = 86$
1 40 46
47

CE1

gilles lundi 20 septembre

si x vaut	7	42	56	78	87	89	93	96
que vaut $x+4$	11	46	60	82	91	93	96	100

Si $x+2$ =	4	8	10	21	27	38	55	59
que vaut x	2	6	8	19	25	3~~0~~6	53	5~~5~~7

Il monte x voyageurs que vaut x

$\boxed{8} \xrightarrow{4} \boxed{12} \xrightarrow{5} \boxed{17} \xrightarrow{8} \boxed{25} \xrightarrow{6} \boxed{31} \xrightarrow{7} \boxed{38} \xrightarrow{7} \boxed{45}$

$\boxed{21} \xrightarrow{+5} \boxed{26} \xrightarrow{+4} \boxed{30} \xrightarrow{+10} \boxed{40} \xrightarrow{12} \boxed{52} \xrightarrow{8} \boxed{60}$

$\boxed{7} \xrightarrow{+4} \boxed{11} \xrightarrow{+10} \boxed{21} \xrightarrow{+10} \boxed{31} \xrightarrow{+20} \boxed{51} \xrightarrow{+6} \boxed{57}$

que vaut x ?

$x + 7 = 15$	$x = 8$
$x + 9 = 18$	$x = 9$
$x + 42 = 50$	$x = 8$
$x + 6 = 67$	$x = 61$
$x + 3 = 85$	$x = 82$
$4 + x = 90$	$x = 86$
$2 + x = 73$	$x = 71$

il monte toujours le même nombre de voyageurs. trouve la constante et continue

$\boxed{15} \xrightarrow{3} \boxed{18} \xrightarrow{3} \boxed{21} \xrightarrow{3} \boxed{24} \xrightarrow{3} \boxed{27} \xrightarrow{3} \boxed{30} \xrightarrow{3} \boxed{33} \xrightarrow{3} \boxed{36} \xrightarrow{3} \boxed{39} \xrightarrow{3} \boxed{42} \xrightarrow{3} \boxed{45} \xrightarrow{3} \boxed{40} \xrightarrow{3} \boxed{51} \xrightarrow{3} \boxed{54} \xrightarrow{3} \boxed{57} \xrightarrow{3} \boxed{60}$

camilo 20/9/76 CE1

si x vaut	7	42	56	78	87	89	93	96
que vaut $x+4$	11	46	60	82	91	93	[illegible]	[illegible]

Si $x+2$ =	4	8	10	21	27	38	55	59
que vaut x	2	6	8	~~9~~ 19	~~25~~ 25	~~16~~ 36	~~53~~ 53	57

Il monte ~~x~~ voyageurs que vaut x

$\boxed{8} \xrightarrow{+4} \boxed{12} \xrightarrow{+5} \boxed{17} \xrightarrow{+8} \boxed{25} \xrightarrow{+6} \boxed{31} \xrightarrow{+7} \boxed{38} \xrightarrow{+7} \boxed{45}$

$\boxed{21} \xrightarrow{+5} \boxed{26} \xrightarrow{+4} \boxed{30} \xrightarrow{+10} \boxed{40} \xrightarrow{+12} \boxed{52} \xrightarrow{+8} \boxed{60}$

$\boxed{7} \xrightarrow{+4} \boxed{11} \xrightarrow{+10} \boxed{21} \xrightarrow{+10} \boxed{31} \xrightarrow{+20} \boxed{51} \xrightarrow{+6} \boxed{57}$

que vaut x ?

$x + 7 = 15$	$x = 8$
$x + 9 = 18$	$x = 9$
$x + 42 = 50$	$x = 8$
$x + 6 = 67$	$x = ~~1~~ 61$
$x + 3 = 85$	$x = 82$
$4 + x = 90$	$x = ~~88~~ 9486$
$2 + x = 73$	$x = 71$

il monte toujours le même nombre de voyageurs. trouve la constante et continue

$\boxed{15} \xrightarrow{+3} \boxed{18} \xrightarrow{+3} \boxed{21} \xrightarrow{+3} \boxed{24} \xrightarrow{+3} \boxed{27} \xrightarrow{+3} \boxed{30} \xrightarrow{+3} \boxed{33} \xrightarrow{+3} \boxed{36} \xrightarrow{+3} \boxed{39} \xrightarrow{+3} \boxed{42} \xrightarrow{+3} \boxed{45} \xrightarrow{+3} \boxed{48} \xrightarrow{+3} \boxed{51} \xrightarrow{+3} \boxed{54} \xrightarrow{+3} \boxed{57} \xrightarrow{+3} \boxed{60}$

CE1 Gilles 21/9

béatrice → ans

Isabelle → ans

2 → 7

3 → 8

4 → 9

8 → 13

5 → 10

6 → 11

7 → 12

9 → 14

10 → 15

12 → 17

$x \rightarrow x + 5$

gilles vendredi 24 septembre 76

Valeurs de x	7	50	18	27	31	52	73	86	91
que vaut $x - 3$	4	47	15	~~24~~ 22	28	59	70	83	88
que vaut $x - 2$	25	48	16	25	29	50	71	84	89

Pour $x =$	8	10	23	35	42	57	61	72	85	94
que vaut $x - 6$	2	4	17	29	36	51	55	66	79	88

Pour $x =$	9	12	18	15	23	52	91	13	74	5
que vaut $x - 4$	5	8	14	11	19	48	87	99	70	1

Pour $x =$	5	23	42	54	71	94	86	67	59
que vaut $x + 6$	11	29	48	60	77	100	92	73	65
que vaut $x - 5$	~~6~~	~~2~~ 4	43	~~5~~5	~~7~~2	~~9~~5	~~8~~7	~~6~~8	~~6~~0

Pour $x =$	5	3	1	4	8	7	6	10	14	12
que vaut $x + 2$	7	5	3	6	10	9	8	12	16	14
$x - 2$	3	1	10	2	6	5	4	8	12	10

hélène vendredi 24 septembre 1976 CE1

Frédérique Laurance - frédérique a 6 ans de (moins) que sa soeur.

6 ans — 12 ans
5 ans — 11 ans
8 ans — 14 ans
17 ans — 23 ans
20 ans — 26 ans
x ans — $x + 6$
21 ans — 27 ans
25 ans — 31 ans
30 ans — 36 ans
35 ans — 41 ans
40 ans — 46 ans

Laurance a 6 ans de (plus) + que sa soeur

L	F
12	6
x	$x - 6$

---

gille vendredi 24 Septembre CE1

frédérique

6 ans $\xrightarrow{+6}$ laurence 12 ans
7 $\xrightarrow{+6}$ 13
9 $\xrightarrow{+6}$ 15
13 $\xrightarrow{+6}$ 19
15 $\xrightarrow{+6}$ 21
$x \xrightarrow{+}$ 6 $x + 6$

Sandrine vendredi ~~24~~ 23 septembre 1976
CE1

Valeur de x :	7	50	18	27	31	52	73	86	91
que vaut $x-3$	4	~~8~~ 47	15	24	28	49	70	~~87~~	88
que vaut $x-2$	5	48	16	25	29	50	71	~~85~~	89

Pour x =	8	10	23	35	42	57	61	72	85	94
que vaut $x-6$	2	4	17	29	36	51	55	66	79	88

Pour x =	9	12	18	15	23	52	91	103	74	3
que vaut $x-4$	5	8	14	11	19	48	87	99	70	~~g~~

Pour x =	5	23	42	54	71	94	86	67	53
que vaut $x+6$	11	29	48	60	77	100	92	~~65~~ 73	~~57~~
que vaut $x-5$	0	18	37	49	66	89	81	62	54

Pour x =	5	3	1	4	8	7	6	10	14	12
que vaut $x+2$	7	5	3	6	10	9	8	12	16	14
$x-9$	3	1	0	2	6	5	4	0	12	10

mardi 28 septembre gilles
CE1

Sylvie Ahane

$1 \xrightarrow{+6} 7$

$9 \xrightarrow{+6} 15$

$10 \xrightarrow{+6} 16$

$38 \xrightarrow{+6} 44$

$100 \xrightarrow{+6} 106$

gilles ~~2~~ 2/10/76 A CE1

$y = x + 4$

$x =$	8	68	7	77	9	89	6	66
$y =$	12	72	11	81	13	93	10	70

$y = x + 6$

$x =$	4	84	6	66	9	89	69	[illegible]	[illegible]
$y =$	10	90	12	~~R7~~ 72	15	9(2)5	75	14	65

$y = x + 5$

x	4	54	8	68	98	7	67	87	9	99
y	9	59	13	73	103	12	72	92	14	104

$y = x - 3$

$x =$	9	~~2~~ 49	6	76	8	98	10	100
$y =$	6	19 46	3	73	5	95	7	97

$y = x - 4$

$x :$	6	76	5	9	39	11	41	10
y	2	72	1	5	35	7	37	98

frédérique 2/10/76 A CE1 CE1

$y = x + 4$

$x =$	8	68	7	77	9	89	6	66
$y =$	12	72	11	81	13	93	10	70

$y = x + 6$

$x =$	4	84	6	66	9	89	69	8	58
$y =$	10	90	12	72	15	95	75	14	64

$y = x + 5$

$x.$	4	54	8	68	98	7	67	87	9	99
y	9	59	13	73	103	12	72	92	14	104

$y = x - 3$

$x =$	9	49	6	76	8	98	10	100
$y =$	6	46	3	73	5	95	7	97

$y = x - 4$

$x :$	6	76	5	9	39	11	41	12
y	2	72	1	5	35	~~8~~ 7	~~38~~ 37	8

Jacques 2/10/76 CE1

$y = x + 4$

x =	8	68	7	77	9	89	6	66
y =	12	72	11	81	13	93	10	70

$y = x + 6$

x =	4	84	6	66	9	89	69	8	5
y =	10	90	12	72	15	95	79	14	64

$y = x + 5$

x	4	54	8	68	98	7	67	87	9	99
y	9	59	13	73	103	12	72	92	14	104

$y = x - 3$

x =	9	49	6	76	8	98	10	100
y =	6	46	3	73	5	95	7	97

$y = x - 4$

x =	6	76	5	9	39	11	41	12
y =	2	72	1	5	35	7	57	8

CE1 que vaut a ? gilles lundi 4 octobre 70

$13 + a = 15$ $\begin{cases} a = 15 - 13 & a = 2. \quad 15 - 13 = 2 \\ a = 2 & 2 = 15 - 13. \end{cases}$

$19 + a = 21$ $\begin{cases} a = 21 - 19 & a = 2 \quad 21 - 19 = 2 \\ a = 2 & 2 = 21 - 19. \end{cases}$

$27 + a = 34$ $\begin{cases} a = 34 - 27 & a = 13. \quad 34 - 27 = 13 \\ a = 13 & 13 = 24 - 27. \end{cases}$

$46 + a = 55$ $\begin{cases} a = 55 - 46 & a = 9 \quad 55 - 46. \quad 9 = 55 - 46 \\ a = 9 \end{cases}$

$59 + a = 63$ $\begin{cases} a = 63 - 59 & a = 4. \quad 63 - 59 = \\ a = 4. & 4 = 63 - 59. \end{cases}$

$68 + a = 75$ $\begin{cases} a = 75 - 68 & a = 7. \quad 75 - 68 = \\ a = 7. & 7 = 75 - 68 \end{cases}$

$74 + a = 80$ $\begin{cases} a = 80 - 74 & a = 6. \quad 80 - 74 = 6 \\ a = 6. & 6 = 8 - 74. \end{cases}$

$86 + a = 96$ $\begin{cases} a = 96 - 86 & a = 10. \quad 96 - 86 = \\ a = 10. & 10 = 96 - 86. \end{cases}$

$91 + a = 100$ $\begin{cases} a = \cancel{9}\ 100 - 91 & a = 9. \quad 100 - 91. \\ a = 9 & 9 = 100 - 91 = 9 \end{cases}$

A

Laurent que ... lundi 4 octobre CE1

$13 + a = 15$ — $a = 15 - 13$; $a = 2 = 15 - 13$

$19 + a = 21$ — $a = 2$ $21 - 19$; $a = 2 = 21 - 19$

$27 + a = 34$ — $a = \cancel{4} = 34 - 27$; $a = 7 = 34 - 27$

$46 + a = 55$ — $a = \cancel{8} = 55 - 46$; $a = 9 = 55 - 46$

$59 + a = 63$ — $a = 63 - 59$; $a = 4 = 63 - 59$

$68 + a = 75$ — $a = 75 - 68$; $a = 7 = 75 - 68$

$74 + a = 80$ — $a = 80 - 74$; $a = 6 = 80 - 74$

$86 + a = 96$ — $a = 96 - 86$; $a = \cancel{9}\,10 = 96 - 86$

$91 + a = 100$ — $a = 100 - 91$; $a = 9 = 100 - 91$

Frédérique 8 octobre CE1

+	3	2	5	7	6	8	10
4	7	6	9	11	10	12	14
6	9	8	11	13	12	14	16
9	12	11	14	16	15	17	19
[illegible]	15	14	17	19	~~18~~	20	22
36	39	~~38~~	41	43	42	44	46

+	4	6	8	5	9	7	3
8	12	14	16	13	17	15	11
3	7	9	11	8	12	10	6
9	13	15	17	~~14~~	18	16	12
7	11	13	15	12	16	14	10
4	8	10	12	9	13	11	7
6	10	12	14	11	15	13	9
15	19	21	23	20	24	22	18

Je cherche le double de :

2 → 4
4 → 8
6 → 12
8 → 16
5 → 10
3 → 6
10 → 20
1 → 2
7 → 14
13 → 26
11 → 22
14 → 28
12 → 24
15 → 30

$168 + 231 = 699$

$5848 + 2364 = 7105$

$684 + 93 + 5 = 782$

$823 + 56 + 34 = 913$

$897 - 236 = 661$

$945 - 214 = 731$

$468 - 123 = 345$

$759 - 214 = 545$

$679 - 244 = $ [illegible]

$328 - 102 = 226$

jeudi 14 Octobre 1976 virginie

CE1

Voici les couples pris sur des droites.
Trouve l'équation de la droite.

$y = x+2$ (…) (8,10) (14,16) (21,23)

$y = x+3$ (…) (7,10) (9,12) (18,21)

$y = x+4$ (…) (6,10) (8,12) (11,15)

$y = x+6$ (…) (7,13) (9,15) (13,19)

$y = x+5$ (…) (4,9) (6,11) (8,13) (37,42)

$y = x+7$ (…) (3,10) (5,12) (8,15) (19,26)

$36 + 13 = 49$; $125 + 52 = 177$; $163 + 125 = 288$

$48 + 24 = 72$; $257 + 36 = 293$; $189 + 19 = 208$

$135 + 54 + 12 = 101$; $138 + 46 + 6 = 190$; $259 + 34 + 25 = 318$

$374 + 218 + 39$; $451 + 186 + 34 = 671$

gilles jeudi 21 octobre CE1

$y = x - 4$ $x = y + 4$

$x =$	18	25	-4	~~-8~~	-10	37
$y =$	14	21	-8	-6	~~-6~~	-35

$y = x + 8$ $x = y - 8$

$x =$	34	64	98	-5	-21	-91
$y =$	~~26~~	72	90. 106	~~34~~ 4	-13	83

$x = y - 5$ $y = x + 5$

$x =$	57	~~86~~	-12	-31	-39
$y =$	~~52~~	81	-17	-26	34

$y = x + 7$ $x = y - 7$

x	125	199	~~273~~	~~-9~~	~~-3~~
y	13~~8~~	206 ~~192~~	~~264~~	-2	4

$y = x - 7$ $x = y + 7$

x	293	305	+0	-9	5
y	~~300~~	31~~2~~ ~~6~~ ~~18~~ 8	-7	-16	~~12~~

équipe Laurent manège à 5F CE1
Franck Jacques Lidia 3F
2F

somme	ticket	prix	reste
45	15	3	
85	17		
24	12	5 2	

75 4

équipe ...
manège à 2F.
(bv) tours 3 francs. 6
manège à 3F.
(br) tours 3 francs. 9F
manège à 5F
tours 3 francs 15F
total 30

équipe Olivia - Coralie - Mathieu - Frédérique.

tours	prix du tour	SOMME
4	3	12
6	5	30
5	2	10
		total
		52

Hélène
Carmelo
Louison

t	p	total
19	3	57
13	2	26
15	5	75

valérie barré Jeudi 16 décembre CE1
caisse à 2F

1 → 2
2 → 4
3 → 6
4 → 8
5 → 10
6 → 12
7 → 14
8 → 16
9 → 18
10 → 20
11 → 22
12 → 24
13 → 26
14 → 28
15 → 30
16 → 32
17 → 34
18 → 36
19 → 38
20 → 40
21 → 42
22 → 44
23 → 46
24 → 48
25 → 50
26 → 52
27 → 54
28 → 56
29 → 58
30 → 60
31 → 62
32 → 64
33 → 66
34 → 68
35 → 70

caisse à 2 F

CE1

tours	prix
1 →	2
4 →	8
3 →	6
5 →	10
7 →	
8	
6	

caisse à 3F

→ 4 →

CE1

tours	prix
1 →	3 F
2 →	6 F
3 →	9 F
4 →	12 F
5 →	15 F
6 →	18
7 →	21
8 →	24
9 →	27
10 →	30
11 →	33
12 →	36
13 →	39
14 →	42
15 →	45
16 →	48
17 →	51
18 →	54
19 →	57
20 →	60
21 →	63
22 →	66
23 →	69
24 →	72
25 →	75
26 →	78
27 →	81
28 →	84
29 →	87
30 →	90
31 →	93
32 →	96

caisse à 5 F

CE1

tours	prise
1	5 F
2	10 F
3	15 F
4	20 F
5	25 F
6	30 F
7	35
8	40
9	45
10	50
11	55
12	60
13	65
14	70
15	75
16	80
17	85
18	90
19	95
20	100
21	105
22	110
23	115
24	120
25	12c
26	130
27	135
28	140

Gilles 17/12/76

CE1

tours à 5 F

- 20
- 10
- 30
- 16 × 5 → 80
- 12 × 5 → 60
- 14 × 5 → 70
- 20 × 5 → 100
- 24 × 5 → 120
- 27 × 5 → 110
- 28 × 5 → 240
- 30 × 5 → 150
- 34 × 5 → 170
- 6 × 5 → 25
- 11 × 5 → ~~54~~ 55

tours à 3 F

- 6
- 5×3 15
- 7×3 21
- 27
- 24
- 57
- ~~..~~ 39
- 60
- ~~..~~ 84
- 81
- ~~..~~ 90
- ~~94~~ 114
- 79
- 174

C

F. ...

5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25

5 × 5 = 25

6 + 6 + 6 + 6 = ~~2~~ 24

4 × 6 = ~~24~~

8 + 8 + 8 + 8 = 32

4 × 8 = 32

9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45

5 × 9 = 45

7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 49

7 × 7 = 49

3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 27

9 × 3 = 27

4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 24

6 × 4 = 24

×	3	5	8	7	6	9	4
3	9	15	24	21	18	27	12
5	15	25	40	35	30	45	20
2	6	10	16	14	12	18	8
1	3	5	8	7	6	9	4

virginie, vendredi 17 décembre 1976 CE 1

tours 5F

tours		Francs
4	4×5	= 20
2	2×5	10
6	6×5	30
16	16×5 →	80
12	12×5 →	60
14	14×5 →	~~50~~ 70
20	20×5 →	100
24	24×5 →	120
22	22×5 →	110 ~~110~~
28	28×5 →	14
30	30×5 →	150
34	34×5 →	
5	5×5 →	25
11	→	55

tours à 3F

tours		Francs
2	2×3	6
5	5×3	15
7	7×3	21
9	9×3	27
8	8×3 =	24
17	17×3 →	51
13	13×3 →	39
20	20×3	60
29	29×3	~~87~~ 87
27	27×3	~~63~~ 61
30	3×30 →	90
38	38×3 =	~~124~~ 114 (3×30) (+ 3×8)
33	→	99
58	58×3 =	~~175~~ 174

5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25
5×5 = 25
6 + 6 + 6 + 6 = 24
6×4 = 24
8 + 8 + 8 + 8 = 32
8×4 = 32
9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45
9×5 = 45
7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 49
7×7 = 49
3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 27
3×9 = 27
4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 24
4×6 = 24

×	3	5	8	7	6	9	[illegible]
3	9	15	24	21	18	27	1[illegible]
5	15	25	40	35	30	45	2[illegible]
2	6	10	16	14	12	18	8
1	3	5	8	7	6	9	4

gilles Lundi 3 Jenvier 1977 CE1

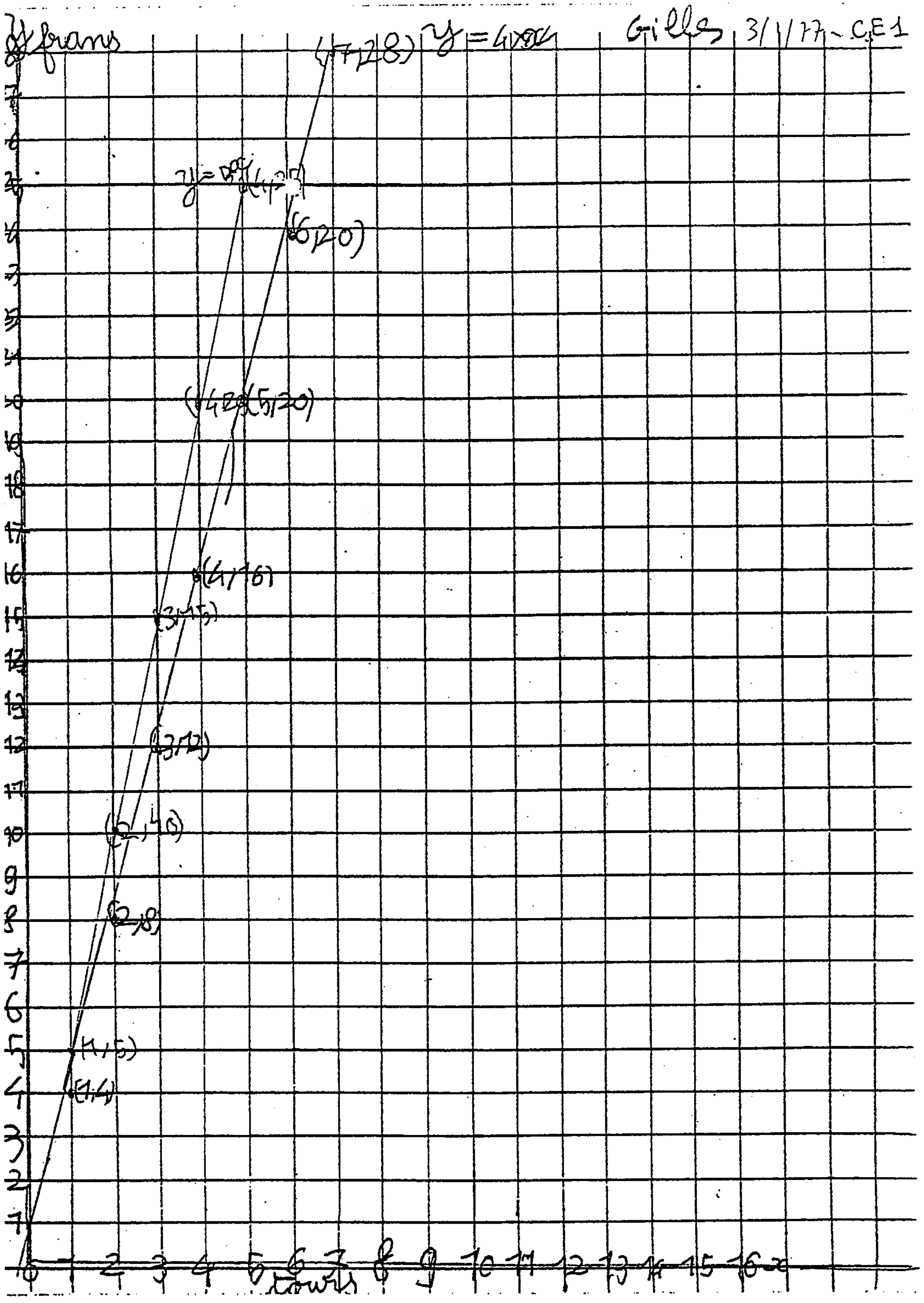
manège à ~~5~~ 4 F

tours	francs
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20
6	24
7	28
8	~~37~~ 36
9	40 (36)
10	44 (40)
11	48 (44)
12	56 (48)
13	~~15~~ 60
14	64
15	68
16	76

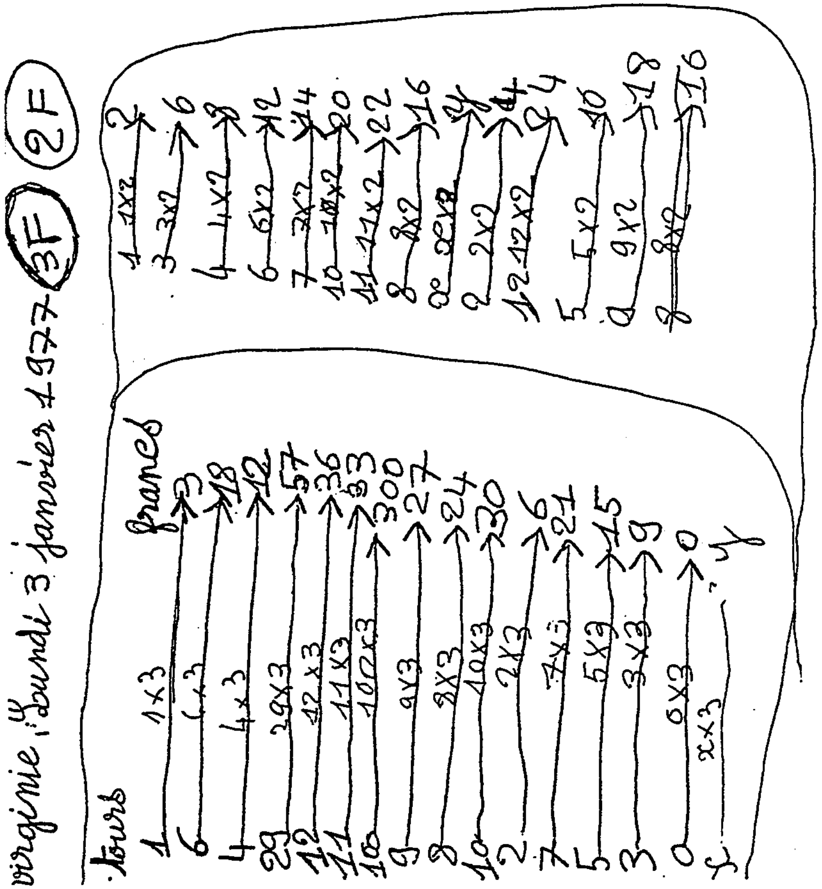
manège a 5 F

tours	francs
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	30
7	35
8	40
9	45
10	50
11	55
12	60
13	65
14	70
15	75
16	80
17	85
18	90
19	95

Gilles 3/1/77 - CE1

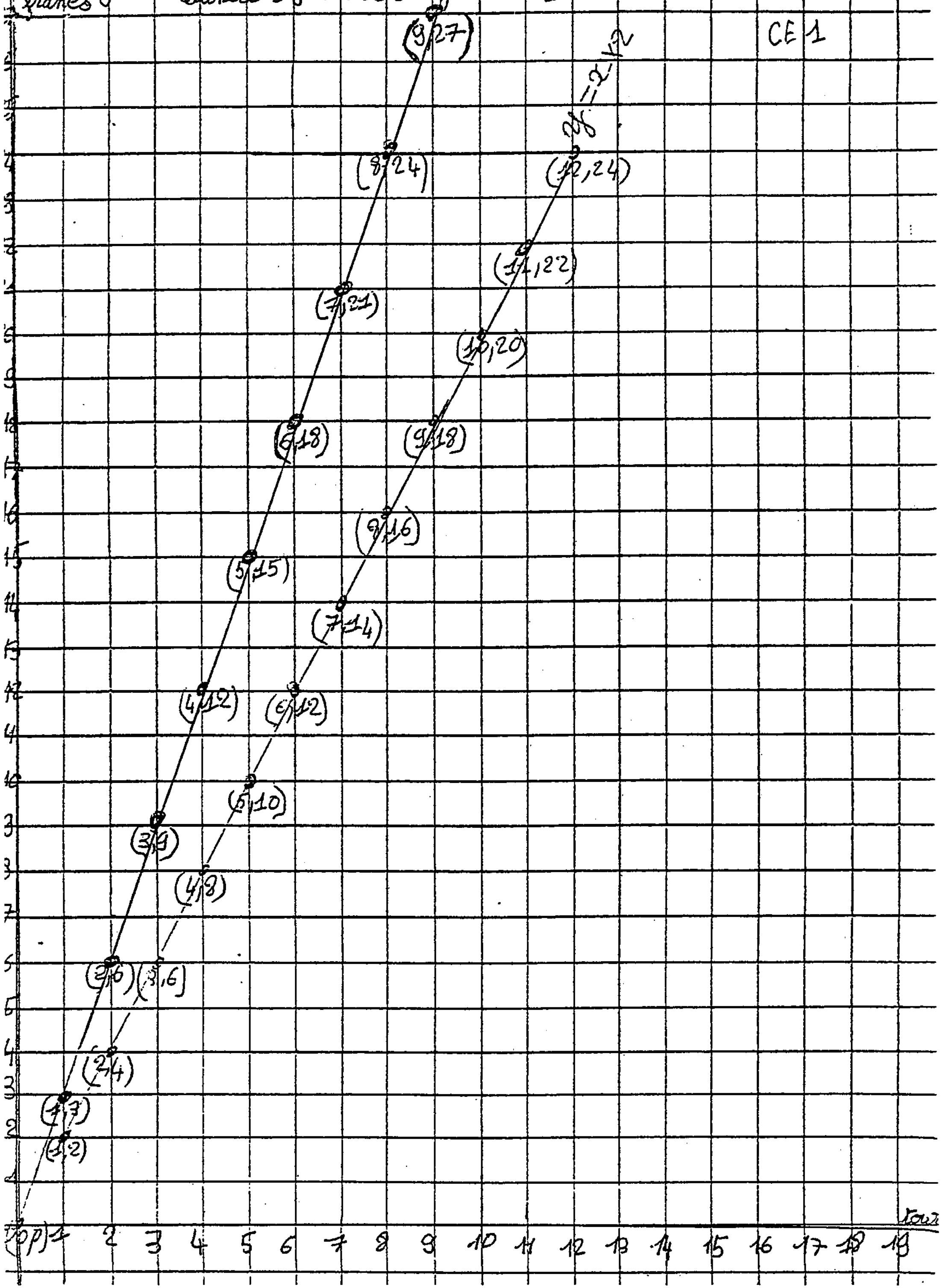


CE1



Virginie Lundi 3 janvier $y = x \times 3$ 1977

CE 1



Virginie Mardi 4 janvier 1977

CE 1

avoir	manège 2F		reste
	tours	francs	
15	1	2	13
	3	6	7
	2	4	3

sommes	tours	manège reste	F	CE1 4/1/77 reste
1000	3	5	15	985
985	10	2	20	965
965	10	1900 5	900 50	16 5 1975
16 5 1975	1178	4	72	843
843	50	5		

gilles jeudi 6 janvier 1977

CE1

$y = 2x$

si x =	4	2	5	1	0	7	5	8	6
y =	8	4	10	2	0	14	10	16	12

$y = 2x$

x =	8	18	38	58	6	4	3
y =	16	36	76	116	12	8	

$y = 3x$

si x =	1	0	3	2	5	7	9
y =	3	0	9	6	15	21	2[illegible]

$y = 3x$

si x =	7	6	8	18	4	16	~~6~~
y =	21	18	24	54	12	48	5[illegible]

$y = 3x$

x =	5	25	28	17	36	45	[illegible]
y =	15	~~90~~ 75	84	51	108	135	6[illegible]

A

CE1

B Gilles Vendredi 07 janvier 197

$y = 3 \times x$ $y = 3x$

Si x =	6	9	8	7	y	6	7
$y = 3 \times x$ =	18 3×6	3×9	(2 3×8 4)	3×7	3×x	3×x	3×x
	18	27	24	21	27	18	21

$21 = 3 \times a$ $a = 7$ $27 = 3 \times a$ $a = 9$

$24 = 3 \times a$ $a = 8$ $15 = 3 \times a$ $a = 5$

$18 = 3 \times a$ $a = 6$ $30 = 3 \times a$ $a = 15$

$y = 4 \times x$ $y = 4x$

x =	3	5	4	6	8	
$y = 4 \times x$	4×3	4×5	4×4	4×6	4×8	4×
	12	20	16	24	32	2

$24 = 4 \times a$ $a = 6$ $16 = 4 \times a$ $a = 4$

$12 = 4 \times a$ $a = 813$ $28 = 4 \times a$ $a = 7$

$8 = 4 \times a$ $a = 32$ $20 = 4 \times a$ $a = (80)$

$y = 4 \times x$

x	9	19	39	49
$y = 4 \times x$	4×9 (36)	4×19	4×39	4×49
	36	76	156	196

Ecris la liste des multiples de 3 Gilles 7/1/77 CE1

0. 3. 6 9 12 15 18 21 24 27 30 33 36 3

42 45 48 51 54 57 60 63 66 69

Ecris la liste des multiples de 4.

0, 4 8 12 16 20 24 28 32 36 40 44 48 52

56 60 64 68 72 76 80 84 88 92 96 100

Ecris la liste des multiples de 5.

0 5 10 15 20 25 30 35 45 50 55 60 65 70 75 80

85 90 95 100 105 110 115 120 125 130 135 140 145

x =	75	93	164	238	509
$y = 2 \times x$	2×75	2×93	2×164	2×238	2×509
	150	180	328	476	1018

x =	9	8	6	7	59	48
= $x \times 3$	3×9	3×8	3×6	3×7	3×59	3×48
	27	24	18	21	177	144

x	2	5	4	6	3	8	7
= $x \times 4$	4×2	4×5	4×4	4×6	4×3	4×8	4×7
	8	20	16	24	12	32	28

$12 = 2 \times a$ $a = 6$ $19 = (2 \times a) + r$ $r = 1$ $a = 9$

$15 = (2 \times a) + r$ $a = 7$ $r = 1$ $24 = (2 \times a)$ $a = 12$

gilles. Lundi 17 janvier 1977

CE1

10 (5× 6 = 60) (6×)

(6× 6 = 36) (× ~~7~~ 6 = 42

3

16 × 6 = ~~162~~

~~4 6~~

16 ×

~~8 6~~

100 = (6×16) + 4

100 = (6×16) = 96 + 4

96

6

159 · 20 × 1 ~~170~~ ~~120~~

6×

120 (60 + (60)

5

6×

30 + 120 = 150 + 6

159 = (2 ~~7~~ 6 × 6) + 3

---

vergnes lundi 17 janvier 1977...

CE1

100 = (16×6) + 4

6 × 1 = 6

6 × 2 = 12

6 × 3 = 18

6 × 7 = 42

6 × 8 = 48

6 × 9 = 54

6 × 10 = 60

6 × 11 = 66

6 × 12 = 72

6 × 13 = 78

6 × 14 = 84

6 × 15 = 90

6 × 16 = 96

Gilles samedi 5 février 1977 CE1 F 20

B −

×	5	8	6	9	7	13
5	25	40	30	45	35	65
4	20	32	24	36	28	52
6	30	48	36	54	42	78
8	40	64	48	72	52	104
9	45	72	~~74~~ 54	81	~~59~~	~~113~~

$\boxed{6} \xrightarrow{\times 3} 18$

$\boxed{8} \xrightarrow{\times 3} 24$

$\boxed{9} \xrightarrow{\times 3} 27$ b

$\boxed{} \xrightarrow{\times 4} 20$

$\boxed{5} \xrightarrow{\times 8} 40$

$\boxed{4} \xrightarrow{\times 4} 16$

$\boxed{8} \xrightarrow{\times 8} \cancel{64}$

$7 \times 3 = 21$
$9 \times 3 = 27$
$8 \times 3 = 24$
$6 \times 3 = 18$
$11 \times 3 = 33$
$5 \times 3 = 15$
$4 \times 4 = 16$
$8 \times 4 = 32$
$4 \times 3 = \cancel{16}\ 12$
$4 \times 6 = 24$
$8 \times 6 = 48$

$y = (3 \times x) + r \quad r < 3$

$y = (3 \times 7) + 2$
$y = (\cancel{73}\times 2)\ 23$
$y = (3 \times 9) + 1$
$y = 28$
$y = (3 \times 7) + 1$
$y = 22$
$y = (3 \times 8) + 2$
$y = 26$ b
$y = (3 \times 6) + 2$
$y = 20$
$y = 16$
$y = (3 \times 4) + 2$
$y = 14$

$y = (3 \times x) + r \quad r < 3$

$13 = (3 \times x) + r$
$13 = (3 \times 4) + 1$
$17 = (3 \times x) + r$
$17 = (3 \times 5) + 2$
$26 = (3 \times x) + r$
$26 = (3 \times 8) + 2$
$28 = (3 \times x) + r$
$28 = (3 \times 9) + 1$
$23 = (3 \times x) + r$
$23 = (3 \times 7) + 2$
$20 = (3 \times x) + r$
$20 = (3 \times 6) + 2$
$32 = (3 \times x) + r$
$32 = (\cancel{3 \times 6}) + 2$
$43 = (3 \times x) + r$
$43 = \cancel{3 \times 26}\ (3 \times 14) + 1$

Mathieu samedi 5 février CE1

B+

×	5	8	6	9	7	13
5	25	40	30	45	35	65
4	20	~~38~~	24	36	28	52
6	30	48	36	54	42	78
8	40	64	48	72	56	104
9	45	72	54	81	63	117

$\boxed{6} \xrightarrow{\times 3} 18$

$\boxed{8} \xrightarrow{\times 3} 24$

$\boxed{9} \xrightarrow{\times 3} 27$

$\boxed{5} \xrightarrow{\times 4} 20$

$\boxed{} \xrightarrow{\times 8} 40$

$\boxed{4} \xrightarrow{\times 4} 16$

$\boxed{8} \xrightarrow{\times 4} 32$

$7 \times 3 = 21$
$9 \times 3 = 27$
$8 \times 3 = 24$
$6 \times 3 = 18$
$11 \times 3 = 33$
$5 \times 3 = 15$
$4 \times 4 = 16$
$8 \times 4 = 32$
$4 \times 3 = 12$
$4 \times 6 = 24$
$8 \times 6 = 48$

M

$y = (3 \times x) + r \quad r < 3$

$y = (3 \times 7) + 2$
$y = 23$
$y = (3 \times 9) + 1$
$y = 28$
$y = (3 \times 7) + 1$
$y = 22$
$y = (3 \times 8) + 2$
$y = 26$
$y = (3 \times 6) + 2$
$y = 20$
$y = (3 \times 5) + 1$
$y = 26$
$y = (3 \times 4) + 2$
$y = 14$

b

$y = (3 \times x) + r \quad r < 3$

$13 = (3 \times x) + r$
$13 = (3 \times 4) + 1$
$17 = (3 \times x) + r$
$17 = (3 \times 5) + 2$
$26 = (3 \times x) + r$
$26 = (3 \times 8) + 2$
$28 = (3 \times x) + r$
$28 = (3 \times \cancel{8}) + \cancel{2}$
$23 = (3 \times x) + r$
$23 = (3 \times 7) + 2$
$20 = (3 \times x) + r$
$20 = (3 \times 6) + 2$
$32 = (3 \times x) + r$
$32 = (3 \times 10) + 2$
$43 = (3 \times x) + r$
$43 = (3 \times 14) + 1$

f

Gilles samedi 30 avril 1977

CE1

$y = (3 \times x) + r$

$r < 3$

5 2 — 2 5 — 1 4

4 1

7 2 — 2 7

6 1

8 2 — 1 6

9 1 — 2 8

3 1 — 1 9

7 2 — 1 3

$7 = (3 \times 2) + 1$ — 2 1 — 1 2

A

$y = (4 \times x) + r$

$r < 4$

$6 = (4 \times 1) + 2$ — 2 1

$9 = (4 \times 2) + 1$ — 1 2

$11 = (4 \times 2) + 3$ — 3 2

$14 = (4 \times 3) + 2$ — 2 3

$16 = (4 \times 4) + 0$ — 0 4

$17 = (4 \times 4) + 1$ — 1 4

$19 = (4 \times 4) + 3$ — 3 4

$23 = (4 \times 5) + 3$ — 3 5

$31 = (4 \times 7) + 3$ — 3 7

$39 = (4 \times 9) + 3$ — 3 9

$33 = (4 \times 8) + 1$ — 1 8

$32 = (4 \times 8) + 0$ — 0 8

0 8 — 0 9 — 1 6

0 8 — 4 6 — 2 4 — 8 20

2 1 — 12 — 1 13 — 13

Camilo (L) Samedi 30 avril 1977 CE1

A

$y = (3 \times x) + r$

$r < 3$

5 2 — 2 5 — 1 4

4 1

7 2 — 2 7

6 1 — 1 6

8 2 — 2 8

9 1 — 1 9

3 1 — 1 3

1 2 — 2 1

7 2 1 — 1 2

× 1 2 — 2 1

× 2 1 — 1 2

× 2 3 — 3 2

× 3 2 — 2 3

4 0 — 0 4

4 1 — 1 4

4 3 — 3 4

5 3 — 3 5

7 3 — 3 7

9 3 — 3 9

8 1 — 1 8

× 8 + 0 — 0 8

0 8 — 0 9 — 3 6

0 8 — 4 6 — 2 4 — 3 3

2 1 — 2 2 — 1 3 — 6

30/4/77 Lilia CE1

$y = (3 \times x) + r$

$r < 3$

$17 = (3 \times 5) + 2$
$13 = (3 \times 4) + 1$
$23 = (3 \times 7) + 2$
$19 = (3 \times 6) + 1$
$26 = (3 \times 8) + 2$
$28 = (3 \times 9) + 1$
$10 = (3 \times 3) + 1$
$5 = (3 \times 1) + 2$
$7 = (3 \times 2) + 1$

$\begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ 2 & 5 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 13 & 3 \\ 1 & 4 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 23 & 3 \\ 2 & 7 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 19 & 3 \\ 1 & 6 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 26 & 3 \\ 2 & 8 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 28 & 3 \\ 1 & 9 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ 1 & 3 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}$

$y = (4 \times x) + r$

$r < 4$

$6 = (4 \times 1) + 2$
$9 = (4 \times 2) + 1$
$11 = (4 \times 2) + 3$
$14 = (4 \times 3) + 2$
$16 = (4 \times \cancel{3}4) + 0$
$\cancel{17 = (4 \times 3) + 1}$
$19 = (4 \times \cancel{3}4) + \cancel{3}3$
$23 = (4 \times 5) + 3$
$31 = (4 \times 7) + 3$
$39 = (4 \times 9) + 3$
$33 = (4 \times 8) + 1$
$32 = (4 \times 8) + 0$

$\begin{array}{r|l} 6 & 4 \\ 2 & \cancel{2}1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 9 & 4 \\ 1 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 11 & 4 \\ 3 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 14 & 4 \\ 2 & 3 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 16 & 4 \\ 0 & 4 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 17 & 4 \\ 1 & 4 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 19 & 4 \\ 3 & 4 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 23 & 4 \\ 3 & 5 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 31 & 4 \\ 3 & 7 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 39 & 4 \\ 3 & 9 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 33 & 4 \\ 1 & 8 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 32 & 4 \\ 0 & 8 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 2 & 7 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 0 & 9 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 15 & 2 \\ 1 & 7 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 40 & 5 \\ 0 & 8 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 34 & 5 \\ 4 & 6 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 22 & 5 \\ 2 & 4 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 18 & 5 \\ 3 & 3 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 8 & 6 \\ 2 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 14 & 6 \\ 2 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 19 & 6 \\ 1 & 3 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 18 & 6 \\ 0 & 3 \end{array}$

Gilles jeudi 22 septembre CE2

B−

$\begin{array}{r} 735 \\ -\ 27 \\ \hline 712 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8416 \\ -\ 38 \\ \hline 808 \end{array}$ $\begin{array}{r} 9613 \\ -\ 27 \\ \hline 936 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8511 \\ -\ 439 \\ \hline 412 \end{array}$

$\begin{array}{r} 46514 \\ -\ 2327 \\ \hline 2627 \end{array}$ $\begin{array}{r} 612165 \\ -\ 1489 \\ \hline 5716 \end{array}$ $\begin{array}{r} 715123 \\ -\ 2531 \\ \hline 8592 \end{array}$

$y = 2x + 5$

si x =	48	167	986	1539	2093
y =	96 101	331 339	207 ~~3777~~	31813	~~6087~~

x	4	8	7	9	5	3	2	0	6	10
2	8	16	14	18	10	6	4	0	12	20
4	16	32	28	36	20	12	8	0	24	40
3	12	24	21	27	15	9	6	0	18	30

J

$y = 2x + r$ $r < 2$

$7 = (2 \times 3) + 1$
$5 = (2 \times 2) + 1$
$9 = (2 \times 4) + 1$
$11 = (2 \times 5) + 1$
$12 = (2 \times 6) + 0$
$15 = (2 \times 7) + 1$
$19 = (2 \times 8) + 0$
$25 = (2 \times 12) + 1$

J

$y = 2 \times x$
$12 = 2 \times 6$
$6 = 2 \times 3$
$8 = 2 \times 4$
$10 = 2 \times 5$
$18 = 2 \times 9$
$16 = 2 \times 8$
$20 = 2 \times 10$
$26 = 2 \times 13$
$64 = 2 \times 32$

J

Lidia 22 septembre 77 CE2

C–

$$\begin{array}{r} 735 \\ -\ \ 27 \\ \hline 712 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 846 \\ -\ \ 38 \\ \hline 808 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 963 \\ -\ \ 27 \\ \hline 936 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 852 \\ -439 \\ \hline 412 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4654 \\ -2327 \\ \hline 233\cancel{4} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6205 \\ -\ \ 489 \\ \hline 5716 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7523 \\ -2931 \\ \hline 4582 \end{array}$$

$y = 2x + 5$

si x =	48	167	986	1539	2093
y =	~~97~~	~~238~~	1962	3062	4486

x	4	8	7	9	5	3	2	0	6	10
2	8	16	14	18	10	6	4	2	12	20
4	16	32	28	36	20	12	8	4	24	40
3	12	32	29	35	15	9	6	3	18	30

$y = 2x + b \qquad b < 2$

$7 = (2 \times 3) + 1$
$5 = (2 \times 2) + 1$
$9 = (2 \times 4) + 1$
$11 = (2 \times 4) + 2$
$12 = (2 \times 6) +$
$15 = (2 \times 7) + 1$
$19 = (2 \times 9) + 1$
$25 = (2 \times 12) + 1$

$y = 2 \times x$

$12 = \cancel{(2 \times 5) + 2}$
$6 = 2 \times 3$
$8 = 2 \times 4$
$10 = 2 \times 5$
$18 = 2 \times 9$
$16 = \cancel{(2 \times 7) + 2}$
$20 = 2 \times 10$
$26 = 2 \times \cancel{11}$
$64 = 2 \times 32$

Gilles Jeudi 3 Novembre 77 CE2

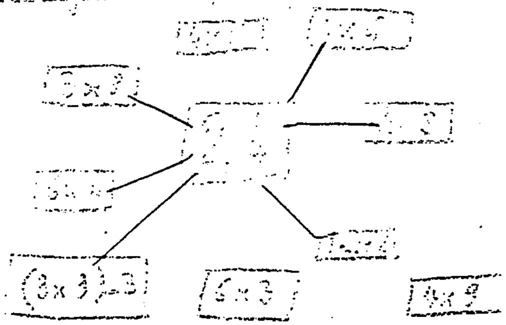
$y = 4 \times x$

x		8		6		3	9	7	
y	20		36		28				96

$y = 4x - 6$

x		~~7~~		~~5~~		~~4~~		~~8~~	
y	10		62		110		134		$49\cancel{4}$

1 ——
3 —— 12
9 —— 36
6 —— ~~48~~ 18
15 —— 60
21 —— 84
—— ~~172~~
10 ——
21 ——
31 ——
60 ——
97 —— 97
4 ——



$15 = (4 \times 3) + 3 \qquad = (4 \times 4) + 3$
$23 = (4 \times 5) + 3 \qquad = (4 \times 9) + 2$
$31 = (4 \times 7) + 3 \qquad = (4 \times 11) + 3$
$= (4 \times 31) + 1 \qquad = (4 \times 15) + 2$

—— 14
—— 28
6 ——
3 ——
5 —— 35
4 ——

56F

224F

322

$$\begin{array}{c|c|c|} & 2 & 3 \\ \hline & 2 & 3 \\ & 8 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 2 \end{array}$$

Lidia 3 novembre jeudi 77 CE2

$y = 4 \times x$

x :	5	8	9	6	7	3	9	7	24
y	20	32	36	24	28	12	36	28	96

$y = 4x - 6$

x = 4	6	17	8	29	7	35	9	126
y 10	18	62	26	~~30~~	22	~~45~~	30	49~~2~~

J'achète

tartes		prix
1	1×4	4
3	3×4	12
9	9×4	36
6	6×4	24
15	4×15	60
21	4×21	84
37	37×4	148
10 x		40 y
21		84
46		184
60		240
~~20~~		97

est égal à 24 →

4×8 4×6 3×8 **24** 8×3 6×4 12×2 (3×9)−3 6×3 4×9

$y = (4 \times x) + r \quad r < 4$

$15 = (4\times3)+3$, $19 = (4\times4)+3$

$23 = (4\times5)+3$ $38 = (4\times8)+2$

$31 = (4\times7)+3$ $47 = ($

$125 = (4\times200)+5$ $62 =$

Grégoire et Damien mangent à la cantine, le repas coûte 7F. Combien la maman va-t-elle payer pour la semaine de classe?

– pour les 4 semaines?

– pour un mois de 23 j de classe.

repas		Francs
1		7F
2	~~2×7+7~~	~~21~~
"	~~4×7+7~~	~~37~~
5		
~~2~~		21
3+1		35
~~4~~		28

Gilles Lundi 5 Décembre 1977 CE2

B

i en cm	r en cm	l en cm	p en cm
5	2 [illegible]	7	14
4+1/2	5	9+1/2	19
8	4	12	24
2+2/3	2+1/3	5	10
3+2/5	8+4/5	12+1/5	14+2/5
1/4	2+1/2	2+3/4	5+1/2
6	1/2 ~~1/2~~	6+1/2	13
7+3/10	1+7/10	9	18
15+1/2	9	24+1/2	49
13+3/4	15+1/4	28+1/2	57
7+85/100	3+15/100	11	22
9/10	2+3/2	?	[illegible]
6+7/10	12+3/10	19	38
83/100	3+17/100	4	8
2/3	5/2		

i et r sont les mesures des côtés

l = 1/2 p

5 Décembre 77. CE2 Bastien

i	r	ℓ	P
en cm	en cm	en cm	en cm
5	2	7	14
4+1/2	5	9+1/2	19
8	4	12	24
2+2/3	2+1/3	5	10
3+2/5	8+4/5	12+1/5	24+2/5
1/4	2+1/2	2+3/4	5+2/4
6	5/10	6+5/10	13
7+3/10	1+7/10	9	18
15+3/6	9	24+3/6	49
13+3/4	14+6/8	28+4/8	57
7+85/100	3+15/100	11	22
9/10	2+3/2	3+1/2+9/10	8+8/10
6+7/10	12+3/10 (12)	19	38
83/100	3+17/100	4	8
2/3	5/2	2/3+5/2	6+1/3 5+1=6

5/2 = 2+1/2

i et r sont les mesures des côtés
ℓ = 1/2 P

T.B

A.

Marc. Lundi 5 Décembre 1977. CE2

en cm	en cm	en cm	en cm
5	2	7	14
4+1/2	5	9+1/2	19
8	4	12	24
2+2/3	2+1/3	5	10
3+2/5	8+4/5	12+1/5	24+2/5
1/4	2+1/2	2+3/4	5+2/4
6	5/10	6+5/10	13
7+3/10	1+7/10	9	18
15+1/2	9	24+1/2	49
13+3/4	14+3/4	28+2/4	57
7+85/100	3+15/100	11	22
9/10	2+3/2	4+4/10	8+8/10
6+7/10	12+3/10	19	38
83/100	3+17/100	4	8
2/3	5/2	3+1/6	6+2/6

A

[illegible] des côtés
ℓ = 1/2 P

[illegible]

23/1/78 Virginie 23/1/

$a \times b = 12$

$a = 4$

$b = 3$

$4 \times b = 12$

$b = 3$

$6 \times b = 12$

$b = 2$

$a \times 3 = 12$

$a = 4$

$\frac{1}{2} \times b = 12$

$b = 24$

$a \times \frac{1}{4} = 12$

$a = 48$

$\frac{4}{3} \times b = 12$

$b = 9$

$\frac{9}{4} \times b = 12$

$b = 5 + 3/10$

$a \times \frac{5}{4} = 12$

$a = 9 + 3/10$

$a \times \frac{4}{3} = 12$

$a = 9$

$b \times \frac{12}{5} = 12$

$b = 5$

$a \times b = 15$

$5 \times b = 15$

$b = 3$

$a \times \frac{2}{5} = 15$

$a = 37 + 1/2$

$\frac{8}{5} \times b = 15$

$b = 9 + 3/10$

$\frac{7}{10} \times b = 15$

$b = 21 + 3/10$

$a \times \frac{9}{10} = 15$

$a = 15 + 5/10$

$a =$

$b = 30$

$\frac{3}{4} \times b = 15$

$b = 20$

$\frac{7}{3} \times b = 15$

$b = 6 + 1/10$

$\frac{9}{100} \times b = 15$

$b = 152 + \frac{2}{10}$

$a \times \frac{3}{100} = 15$

$a = 500$

CE2

Mathieu Vendredi 10 février 1978

cherche d'autres écritures

$\frac{14}{100} = \frac{7}{50} = \frac{28}{200} = 0,14$

$\frac{85}{1000} = \frac{170}{2000} = \frac{340}{4000} =$

$\frac{750}{1000} = \frac{1500}{2000} = \frac{3000}{4000} = 0,750$

$\frac{3}{10} = \frac{6}{20} = \frac{12}{40} = 0,3$

$8 + \frac{7}{100} = \frac{807}{100} = 8 + \frac{14}{200} = 8,07$

$\frac{9}{100} = \frac{18}{200} = \frac{36}{400} = 0,09$

$49 + \frac{13}{1000} = \frac{49013}{1000} = \frac{98026}{2000} = 49,013$

$8 + \frac{5}{100} = \frac{805}{100} = 8 + \frac{10}{200} = 8,06$

$21 + \frac{86}{100} = \frac{2186}{100} = 21 + \frac{172}{200} = 21,86$

$37 + \frac{205}{1000} = \frac{37205}{1000} = \frac{74410}{2000} = 37,205$

$275 + \frac{79}{1000} = 276 + \frac{146}{2000} = \frac{27573}{1000} = 276,073$

$6 + \frac{15}{10000} = \frac{60015}{10000} = 6 + \frac{30}{20000} = 6,015$

$\frac{9}{100} + \frac{15}{10} = \frac{159}{100} = \frac{9}{100} + \frac{30}{20} = 1,69$

b Compare

6,09 et 6,0905

$6,09 < 6,0905$

$6,0905 > 6,09$

372,705 et 372,705005

372,705

372,7060

$372,705 <$ 372,7

$372,705008 >$ 372,7

CE2

Gilles Lundi 6 Mars 1978 C CE2

$\frac{350}{100} + \frac{267}{100} = \frac{617}{100} = 6,17$

$= 6 + \frac{17}{100}$

3,50
+ 2,67
6,17

$\frac{8300}{1000} + \frac{39}{1000} = \frac{8339}{1000}$ 8,339

$= 8 + \frac{339}{1000}$

8,300
+ 0,039
8,339

$\frac{5700}{10000} + \frac{428}{10000} = 0,6128$

$= \frac{6128}{10000} = 0+$

(0,0057
0,0420)
0,0477

0,5700
0,0428
0,6128

$\frac{6128}{10000}$

$\frac{87300}{100000} + \frac{238}{100000} = 0 + \frac{87538}{100000}$

$= \frac{87538}{100000}$

$= \frac{0,87538}{100000}$

(0,00873
0,00238)
0,01112

0,87538

$\frac{4500}{100} - \frac{23}{100} = (27)\ 44,77$

$\frac{3270}{1000} - \frac{656}{1000} = ~~3,226~~$

?

$\frac{3900}{1000} - \frac{726}{1000}$

$\frac{85900}{10000} - \frac{298}{10000}$

(0,87300)
(0,1002)

0,87300
0,00238
0,87578

4 – 11,5
= –10,9
–30,39
4, ~~69,76~~
–39,892 – 45,73 = ~~84,965~~
,8 ~~+60,0~~
–35,6 – 51,5
~~10000~~
8 –156,31
~~76,28~~
41,63
= 4 100
–324
–34

Lidia. lundi 6 (~~février~~) mars 78

$\frac{35}{10} + \frac{267}{100} = 8,17$

3,5 + 2,67

3,50
+ 2,67
6,17

$\frac{53}{10} + \frac{39}{1000} = 8,339$

(~~8,3 + 0,039~~)

8,300
+ 0,039
8,339

$\frac{57}{100} + \frac{428}{10000} = 0,6128$

0,5700
+ 0,0428
0,6128

$\frac{873}{1000} + \frac{238}{100000}$

0,87300
+ 0,00238
0,87538

$\frac{450}{10} - \frac{23}{100} = 44,77$ C+

45,00
– 0,23
44,77

$\frac{327}{100} - \frac{656}{1000} = 2,614$

3,270
– 0,656
2,614

$\frac{39}{10} - \frac{726}{1000} = 3,174$

3,900
– 0,726
3,174

$\frac{859}{100} - \frac{298}{10000} = ~~10,5802~~$

8,5900
– ~~0,0298~~
~~5302~~

= (11,5)
= (10,8)
(30,38)
70,21
(85,622)
(30,6)
–35,6 – ~~(18,7)~~
–77,75 + = (51,50)
–84,31 – (156,31)
–43 – 57,38 (101,28)
–54 + 44,37 ~~(88,37)~~
( ) × ( )
(–34) × 9 =
(–57) × (–) =

CE2

Gilles Lundi 13 Mars 1978 CE2

du polygone — côtés

P

A 2,5 cm
B 1,25
C 24
D 6,8
E 39,2

devient

A 5 cm
B ~~[illegible]~~ 42 2,5
C 48
D ~~13,6~~ 13,6
E 78,4

$x \times 2$

Même consigne

P_1

A 2,5 cm
B : 13
C 24
D 6,8
E 39,2

devient

A_1 = 1,25 cm
B_1 = ~~[illegible]~~
C_1
D_1
E_1

$x \times \frac{1}{2}$

Même consigne

P_2

A = 2,5 cm
B 13
C 24
~~D~~ 6,8
E 39,2

A_8 = 7 cm
36,4
46,2
180,4
1097,6 $x \times 2{,}8$

Même consigne

A = 2,5 cm
B 13
C 24
D 6,8
E 39,2

A_5 = 14 cm

Même consigne

A = 2,5 cm
B =
C :
D :
E :

A_6 15 cm

$x = 6{,}0$

Gilles CE2

2	3	6	7
13	24	6,8	39,2
× 2,8	× 2,8	× 2,8	2,8
10,4	19,2	4,4,4	313,6
26,0	28,0	136,0	784,0
36,4	46,2	180,4	1097,6

2,5 —— 14
5 28
10 56

5,6

gilles

Lundi 13 Mars

2,5 —— 15
5 ~~0~~ ~~3~~30
10 60 = 6,0

…rginie ; Lundi 13 Mars 1978 CE2

	du polygone		côtés	
P	A 2,5 cm	devient →	A1 5 cm.	
	B 13		B1 = 26	
	C 24		C1 = 48	
	D 6,8		D1 = 13,6	
	E 39,2		E1 = 78,4	
	x		y (x×2)	
P1		Même consigne		
	A 2,5 cm	devient →	A3 = ~~1,25~~ 1,25 cm	
	trouve B : 13		B3 = 6,5	
	C 24		C3 = 12	
	D 6,8		D3 = 3,4	
	E 39,2		E3 = 19,6	
	x	Même consigne	$y = \frac{x}{2}$	
P2	A : 2,5 cm	→	A4 = 7 cm	
	B 13		B1 = 36,40	
	C 24		C1 = 67 20	
	D 6,8		D1 = ~~68~~	
	E 39,2		E1 = 109,76	
	x	Même consigne	y = (2,8 × x)	
	A = 2,5 cm	→	A5 = 14 cm	
	B 13		B = 72,80	
	C 24		C = 134,40	
	D 6,8		D = ~~136~~	
	E 39,2		E = ~~918~~ ~~152~~	
	x	Même consigne	y = (5,6 × x)	
	A = 2,5 cm	→	A6 15 cm	
	B = 13		B = ~~84~~	
	C : 24		C = 144	
	D : 6,8		D = ~~36~~,48	
	E : 39,2		E = 234,12	
	x		y = (6×x)	

Gilles Lundi 22 Mai 1978 CE2

Lidia Lundi 22 Mai 1978 CE2

$$\begin{array}{r} 904{,}12 \\ -\ 592{,}870 \\ \hline 311{,}542 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 124{,}82 & 8{,}35 \\ 44 & 15{,}60 \\ 48 & \\ 02 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 278{,}5 \\ \times\ 4{,}087 \\ \hline 19835 \\ 238700 \\ 111400\,00 \\ \hline 1372035 \end{array}$$

$\cancel{278,}$

$\cancel{253{,}75}$

$\cancel{34}$

$$\begin{array}{r} 3437{,}973 \\ +\ 253{,}75 \\ \hline 3691{,}723 \end{array}$$

Lidia CE2

$$\begin{array}{r} 45{,}71 \\ +\ 24{,}5 \\ \hline 70{,}21 \end{array} \quad \begin{array}{r} 39{,}892 \\ +\ 45{,}73 \\ \hline 85{,}622 \end{array} \quad \begin{array}{r} 49{,}8 \\ -\ 19{,}2 \\ \hline 30{,}6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 35{,}6 \\ -\ 15{,}9 \\ \hline 19{,}7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78{,}75 \\ -\ 27{,}25 \\ \hline 51{,}50 \end{array} \quad \begin{array}{r} 84{,}31 \\ +\ 72 \\ \hline 156{,}31 \end{array} \quad \begin{array}{r} 58{,}28 \\ +\ 43 \\ \hline 101{,}28 \end{array} \quad \begin{array}{r} 49{,}37 \\ -\ 91 \\ \hline 98{,}37 \end{array}$$

Gilles 12/1/79 CM1

4 - Donner à x des valeurs telles que

$10,2 \times x < 102$ $10,2 \times 5 = 51,0$

$10,2 \times 9 = 100,8$

- Les trouver toutes.

Il faut pas que x ne depase pas 19,9 . 9,99 . 9,999.

5 - Donner à x des valeurs telles que

~~Il faut pas que le nombre ne~~

$10,2 \times x < 51$ $4 \times 10,2 = 40,8$

- Les trouver toutes. y en a-t-il beaucoup?

oui il faut pas que x ne dépase pas 4,9 . 4,99 . 4,999

Lancelle Frédérique Mardi 18 Juin 1979 CM1

	132,4037
	795,8400
	918,2437

	2004,3000
−	57,0375
	1946,2625

	27,364
×	12,0103
	278 2092
	2 7 3 6400 0
	54 7 2 8000 0
	2 7 3 6 4000 0
	84,896492

ay a-t-il un nombre x tel que
oui

$13,5679 < x < 13,5680$

réponse : $13,5679\frac{1}{4}$
parce que :

13 dans un coin parce qu'il y a 13 et 13 alors on comparait
5679
5680

13,5679
1234

13,5680
1234

0 parce qu'il y a 4 chiffres après la virgule
13 et 13 =
13 = 13
alors on s'en occupera comme il y a 1 de diffé. entre les deux nombre j'ai entre $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ ect...
j'ai choisi $\frac{1}{4}$

CESARO
Lidia

Mardi 19 juin 197

CM1

$$\begin{array}{r} 132,4037 \\ 795,84 \\ \hline 928,2437 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2004,30 \\ 57,0375 \\ \hline 30055 \end{array}$$

FAUX

$$\begin{array}{r} 57,0375 \\ -\ 2004,30 \\ \hline 36994 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2004,30 \\ 57,0375 \\ \hline 16300,55 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27,364 \\ 12,0103 \\ \hline 82092 \\ 273640\cdot\cdot \\ 54788\cdot\cdot\cdot \\ 27364\cdot\cdot\cdot \\ \hline 55497049\,2 \end{array}$$

$13,5679 < x < 13,568$

BARRÉ - Valérie

Mardi 19 juin 1979

CM1

Calculer

$132,4037 + 795,84 = 928,2437$

$2004,3 - 57,0375 = 1947,2625$

$$\begin{array}{r} 132,4037 \\ +\ 795,84 \\ \hline 928,2437 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2004,3 \\ -\ 57,0375 \\ \hline 1947,2625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ 364 \\ \hline 108 \\ 1620 \\ 8100 \\ \hline 9828 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 42 \\ \hline 54 \\ 270 \\ \hline 324 \end{array}$$

$27,364 \times 12,0103 =$

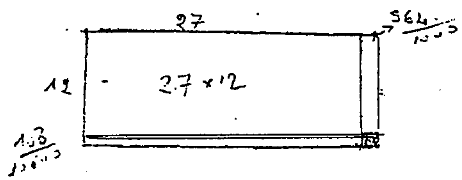
$$\begin{array}{r} 27,364 \\ 12,0103 \\ \hline 82092 \\ 273640\cdot \\ 547280\cdot\cdot \\ 273640000 \\ \hline 331,486492 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 103 \\ \hline 81 \\ 2700 \\ \hline 2781 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 364 \\ \hline 48 \\ 720 \\ 3600 \\ \hline 4368 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 364 \\ 0103 \\ \hline 1092 \\ 3640\cdot \\ 0\cdot\cdot \\ \hline 37492 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 103 \\ \hline 36 \\ 1200 \\ \hline 1236 \end{array}$$



$(27 \times 12) + \left(\frac{364}{1000} \times \frac{103}{10000}\right) + \left(27 \times \frac{364}{1000}\right) + \left(12 \times \frac{103}{10000}\right)$

$$\begin{array}{r} 324 \\ 37492 \\ \hline 37816 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{324} \\ \cancel{37492} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ 37492 \\ 9828 \\ 1236 \\ \hline 48880 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ 37492 \\ 2781 \\ 4368 \\ \hline 44965 \end{array}$$

CHARTRAIN

Yannick

Mardi 19 juin 1979

CM1

1

$$\begin{array}{r} 132,4037 \\ +\ 795,84 \\ \hline 928,2437 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2004,3000 \\ -\ 57,0375 \\ \hline 1947,2625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27,364 \\ 12,0103 \\ \hline 82092 \\ 273640. \\ 547280.. \\ 27364.... \\ \hline 33,1186492 \end{array}$$

2 y a-t-il un nombre x tel que

$13,5679 < x < 13,568$

du moment que le 7 et le 9 ne changent pas de nombre on peut mettre plein de chiffres derrière eux.

x = 13,56791 J'en ~~m'a est~~ ai écris ~~of~~ un peu

13,567967

13,5679,3

13,5679,54 86314857

13,5679178

MARVANNE

Juin 1980

CM2

1) Compare les nombres a et b

a		b
– 74,378	>	73,9
– 74,39	<	75,29
– 75	>	74,4
– 74,3807	<	74,378002
– 74,30708	<	74,308

c

2) Ordonne les nombres suivants

~~75,02~~ | ~~74,378~~ | ~~73,9~~ | ~~74,4~~ | ~~74,3807~~ | ~~75~~ |
~~74,5~~ | ~~74,3078~~ | ~~74,378002~~ | ~~75,012~~ |

du plus petit au plus grand.

75,02 > 75,012 > 75 > 74,5 > 74,4 > 74,3807 > 74,378002 > 74,378 > 74,30 > 73,9

75,02

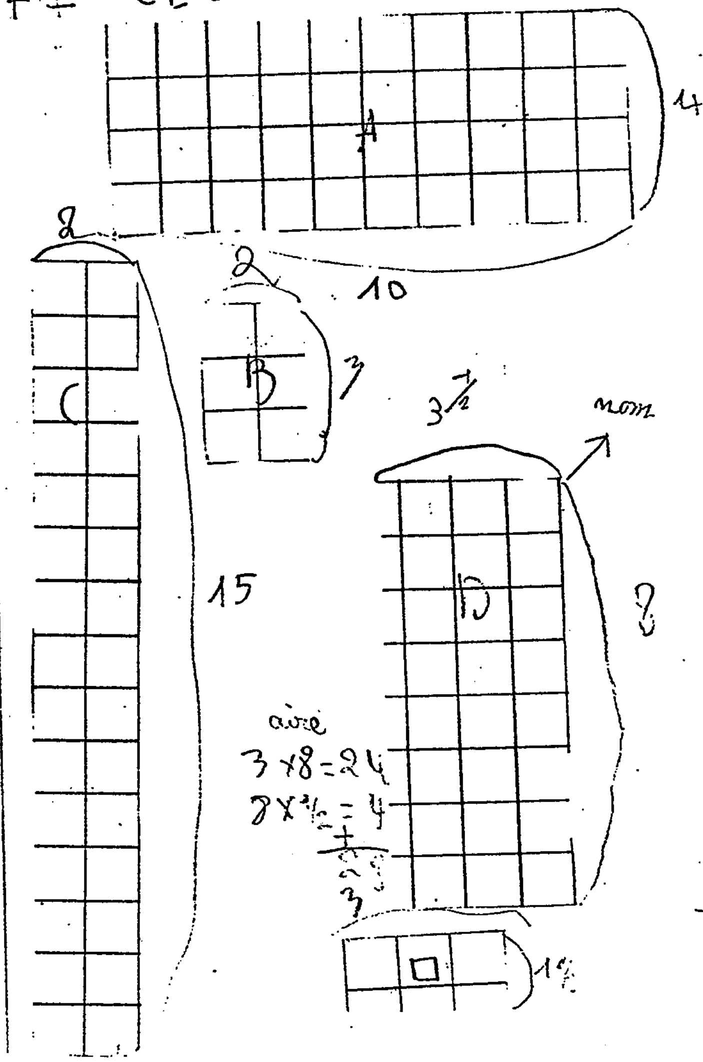
3) Coche la bonne affirmation

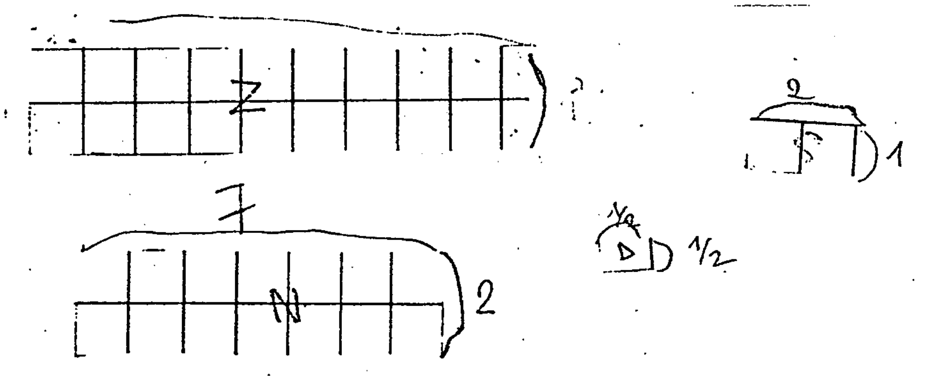
entre … et …	il n'y a aucun nombre	il y a un nombre	il y a plusieurs nombres	Exemples
74 et 75		~~X~~	/	74,5 ; 74,33
74,01 et 74,012			/	74,02 ; 74,0003
74,39 et 74,4			/	~~74,4~~ 74,001 ; 74,0

Bastien - Lundi 5 Décembre 1977 CE2

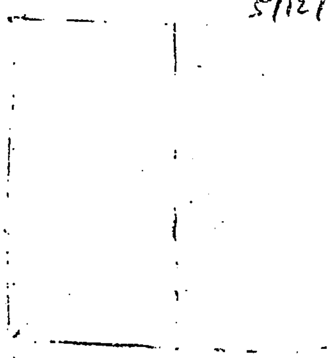
	cm λ	cm et n hele me	λ 2/P	A aire en carreaux
A	4	10	14	40
C	1,5	2	17	30
B	3	2	7	
D	3½	8	11½	
E	3+¼	6½	10+¼	
V	30			

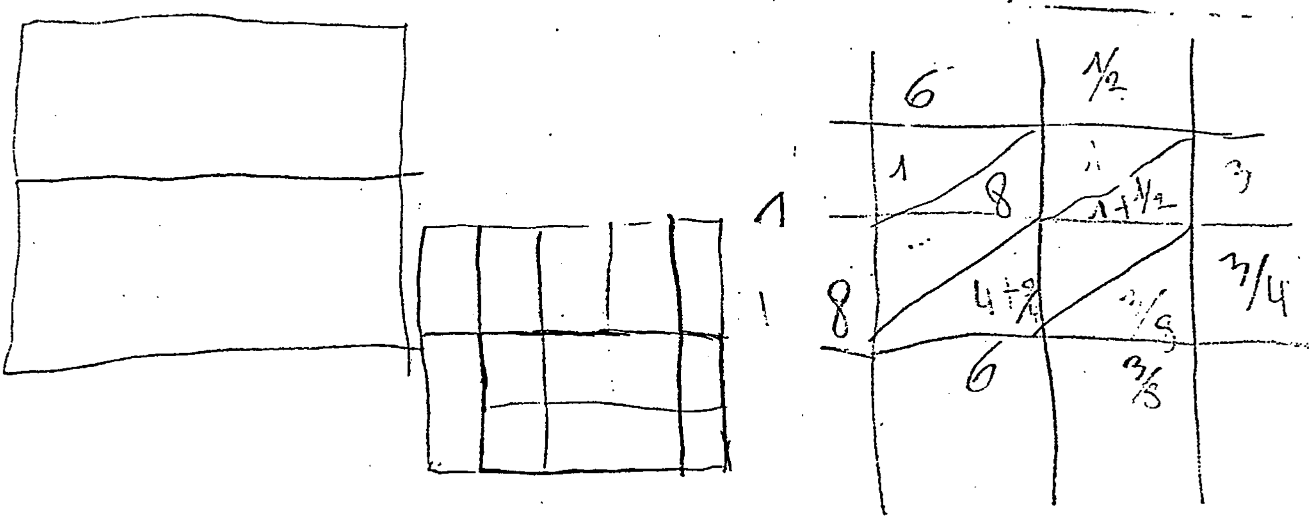
Z
V
O
R
L
i
1
G
F
9
N
S
Δ



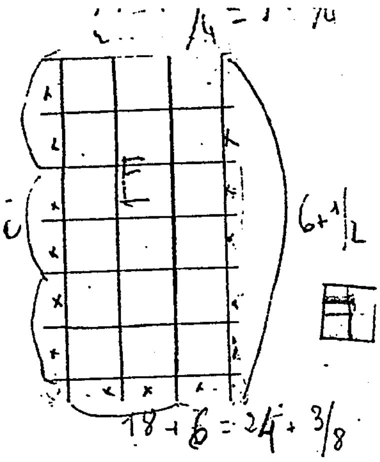


Bastien 5/12/77 CE2





Bastien
5/12/77
CE2

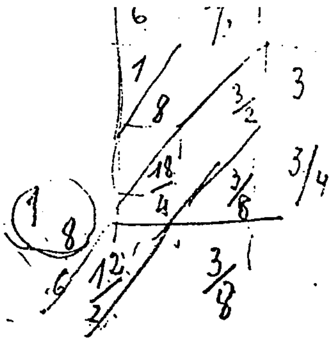


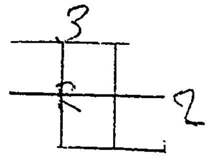
$6+\frac{1}{2}$ $3+\frac{3}{4}$ $10+\frac{2}{4}$ $24+\frac{3}{8}$

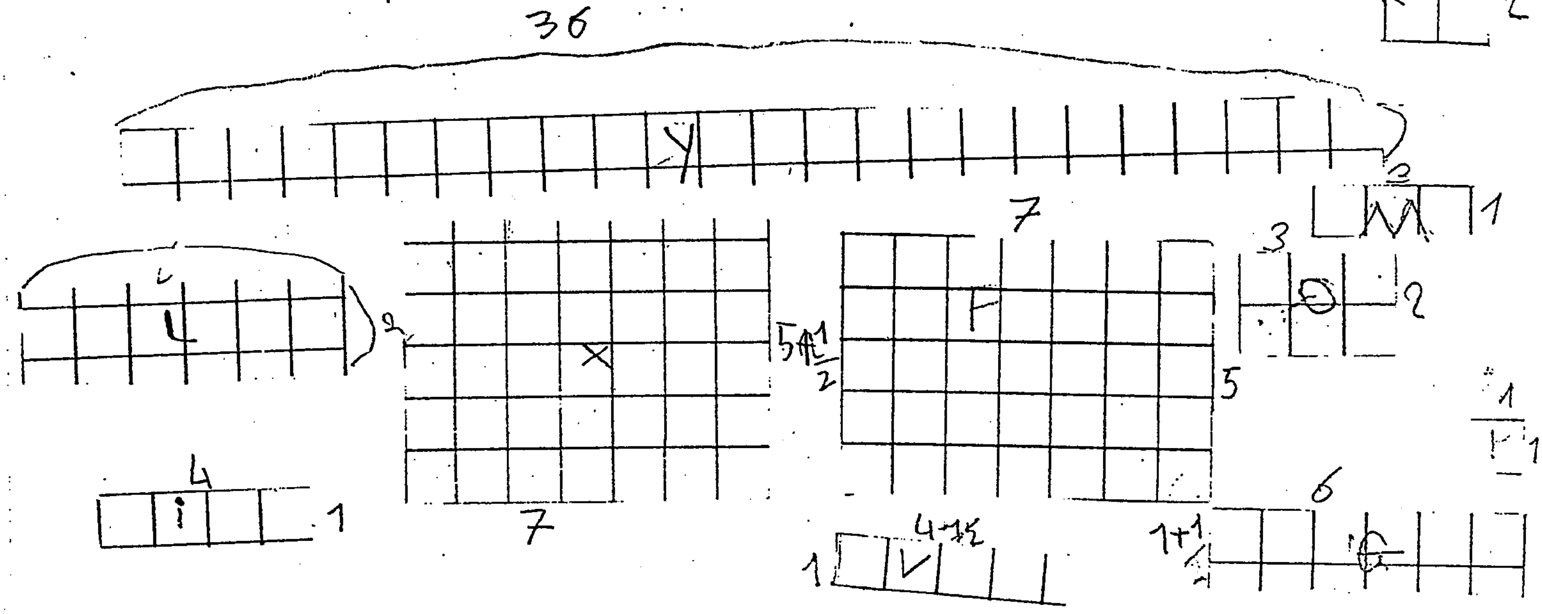
$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

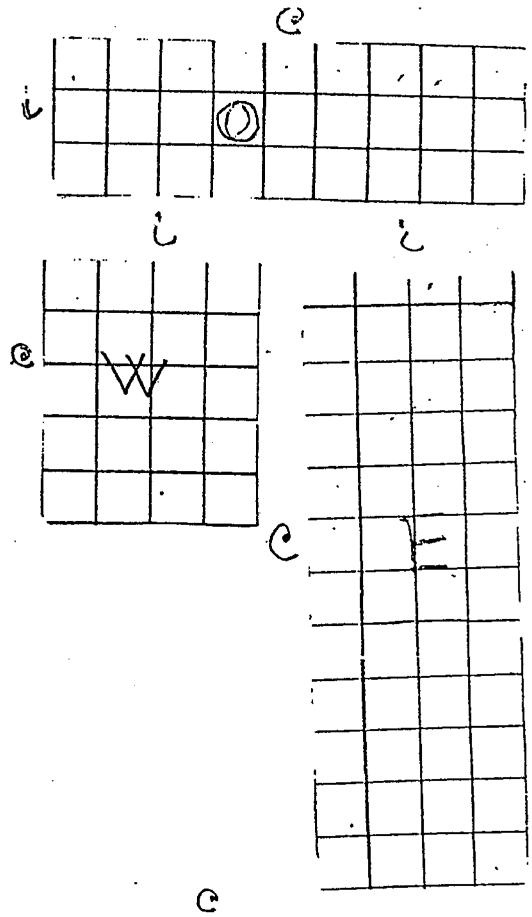
$\frac{13}{2}\times\frac{15}{4}=\frac{195}{8}$

$18+6=24+\frac{3}{8}$

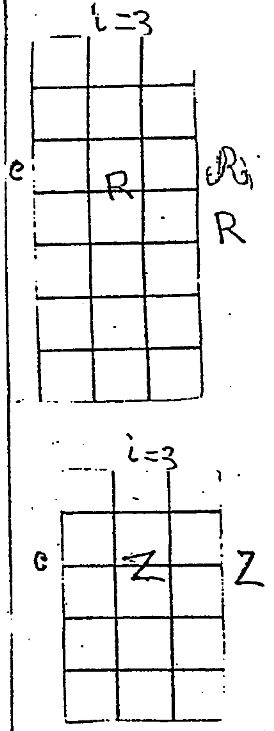




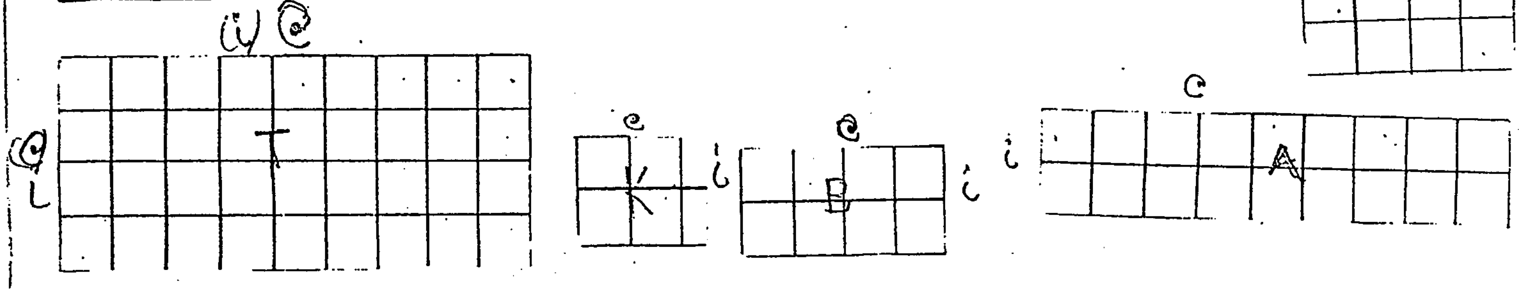




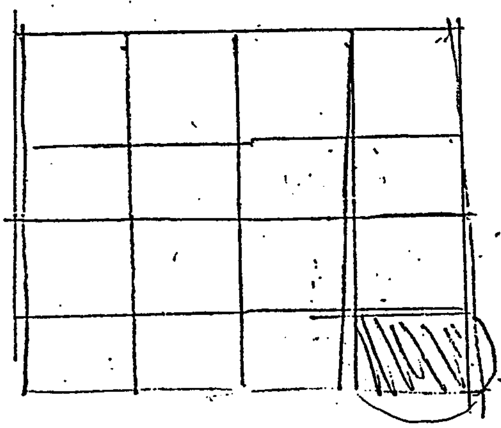
camilo. Lundi 5 decembre CE2



	i	c	l	A
R	3	7	10	21
Z	5	3	8	15
T	4	9	13	36
O	3	9	12	27
E	4	12	16	48
A	2	9	11	18
W	4	5	9	20
B	2	4	6	8
K	$\frac{1}{2}$	$2+\frac{1}{2}$	$3+\frac{1}{2}$	$4+\frac{9}{2}$



camilo CE 2

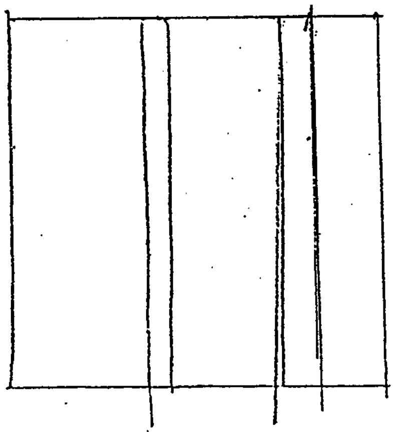


(a = 6/4)

a = 6/16

1/4

1/4

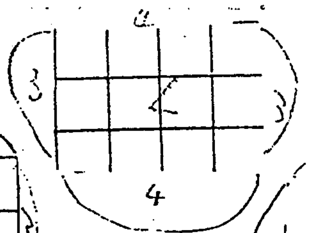


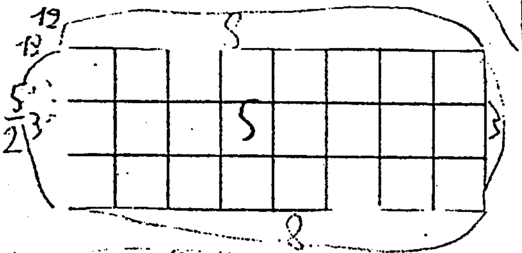
5/12/77 CE 2

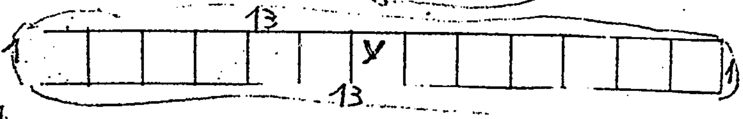
Elsa

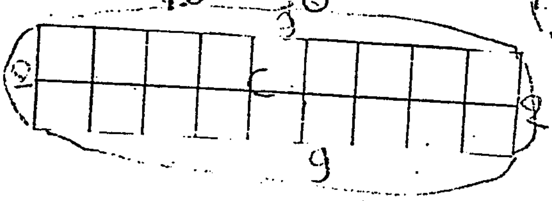
Nom	i	r	l	Aire
B	7	4	11	28
C	9	2	11	18
R	6	5	11	30
T	10	1	11	10
S	8	3	11	25
A	15	2	~~17~~	30

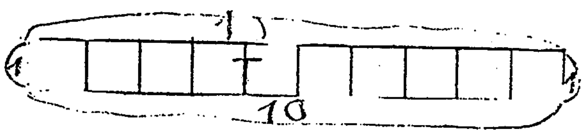
Nom	i_r	l	Aire
Z	4-3	7	19
Y	13-1	14	13
x	5+1/2 1/2	6	5/2
W	7		

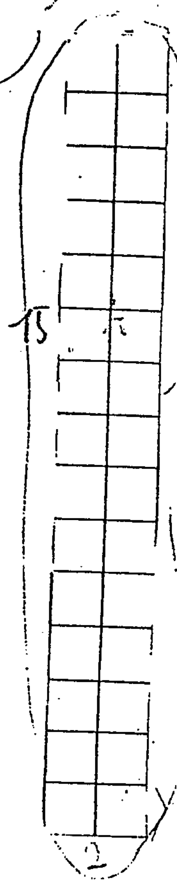


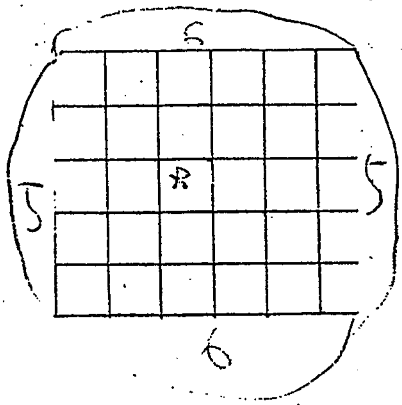


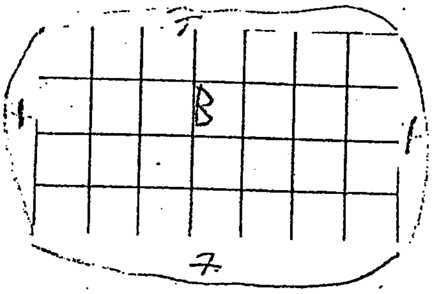




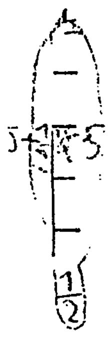






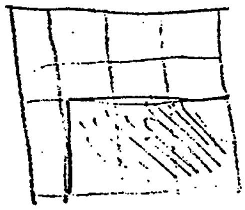


$5 + \frac{1}{2}$



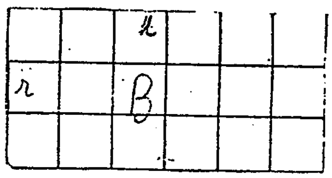
Elsa-Lundi décembre 1977 CE 2

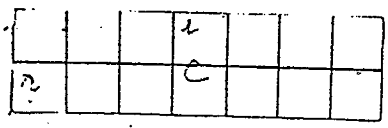
$\frac{6}{16}$



Frédérique Lundi 5 décembre 1977 CE 2

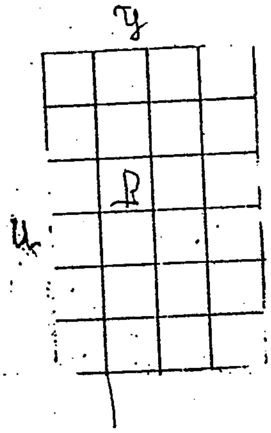
nom des rectangles	l	r	l	Aire en carreaux
B	6	3	9	18
C				18
D				
E				
F				

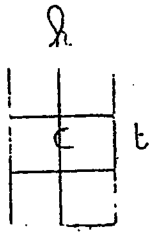


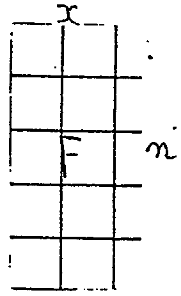


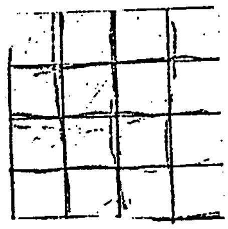
grégoire. lundi 5 décembre 1977 A = aire en carreaux CE2

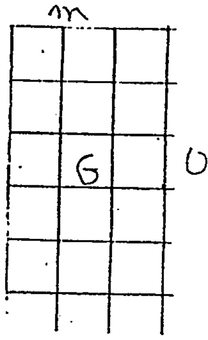
nom du rectangle	R	i	ℓ	A
C	2	3	5	6
P	6	4	10	24
F	$2+\frac{1}{2}$	5	$7+\frac{1}{2}$	$12+\frac{1}{2}$
G	$3+\frac{1}{4}$	6	$9+\frac{1}{4}$	$19+\frac{1}{2}$





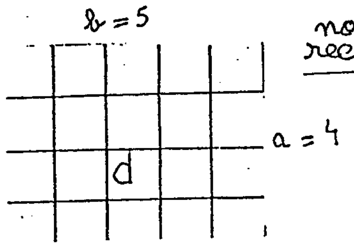


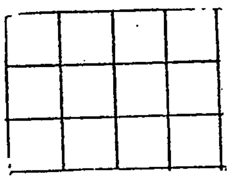


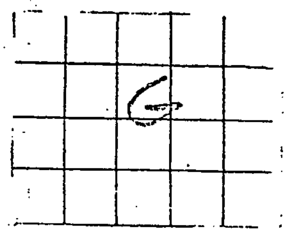


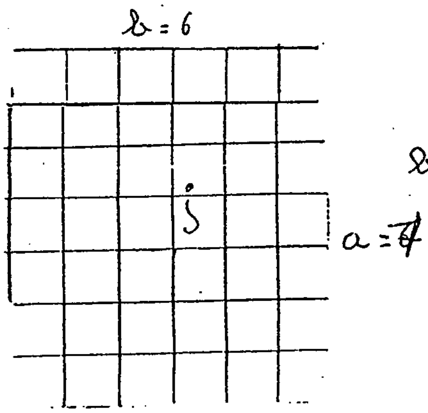
Hélène
5/12/77
CE2

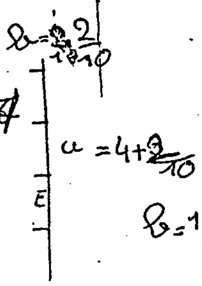
nom de rectangle	a	b	ℓ	A
d	4	5	9	20
j	7	6	13	42
P	$5+\frac{1}{2}$	9	$14+\frac{1}{2}$	$49+\frac{1}{2}$
u	6	2	8	12
Z	5	$6+\frac{1}{4}$	$11+\frac{1}{4}$	
E	$4+\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$4+\frac{4}{10}$	

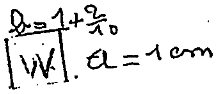


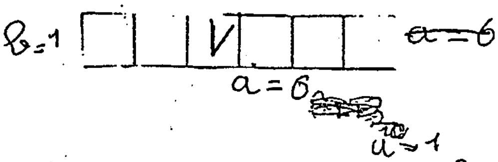


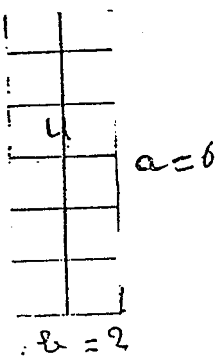


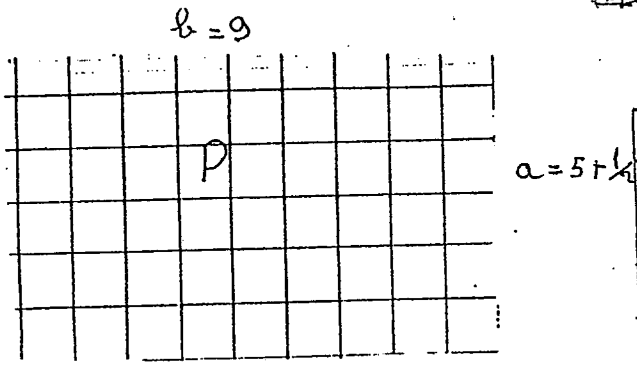


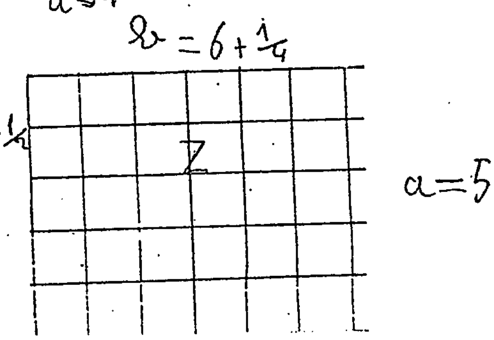






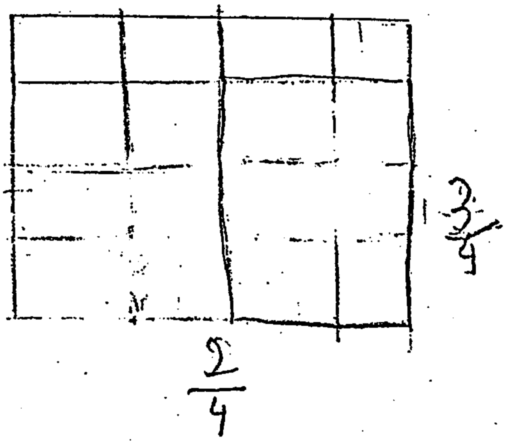


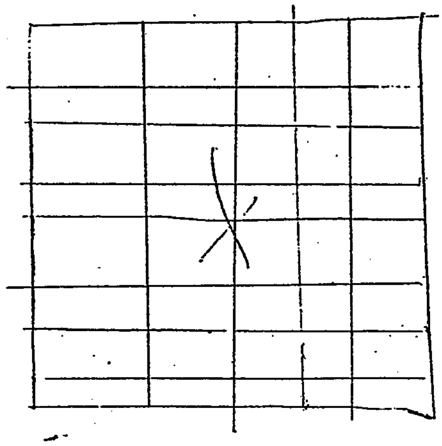


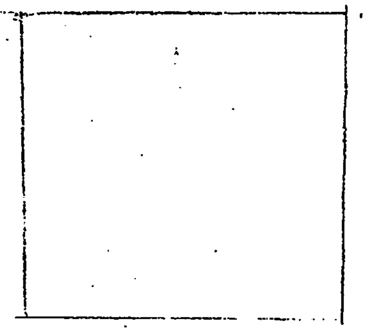


Hélène - Lundi 5 Décembre 1977 CE2

Nom du rectangle	a	b	l	A
V	6	1	7	6
W	1	1+2		

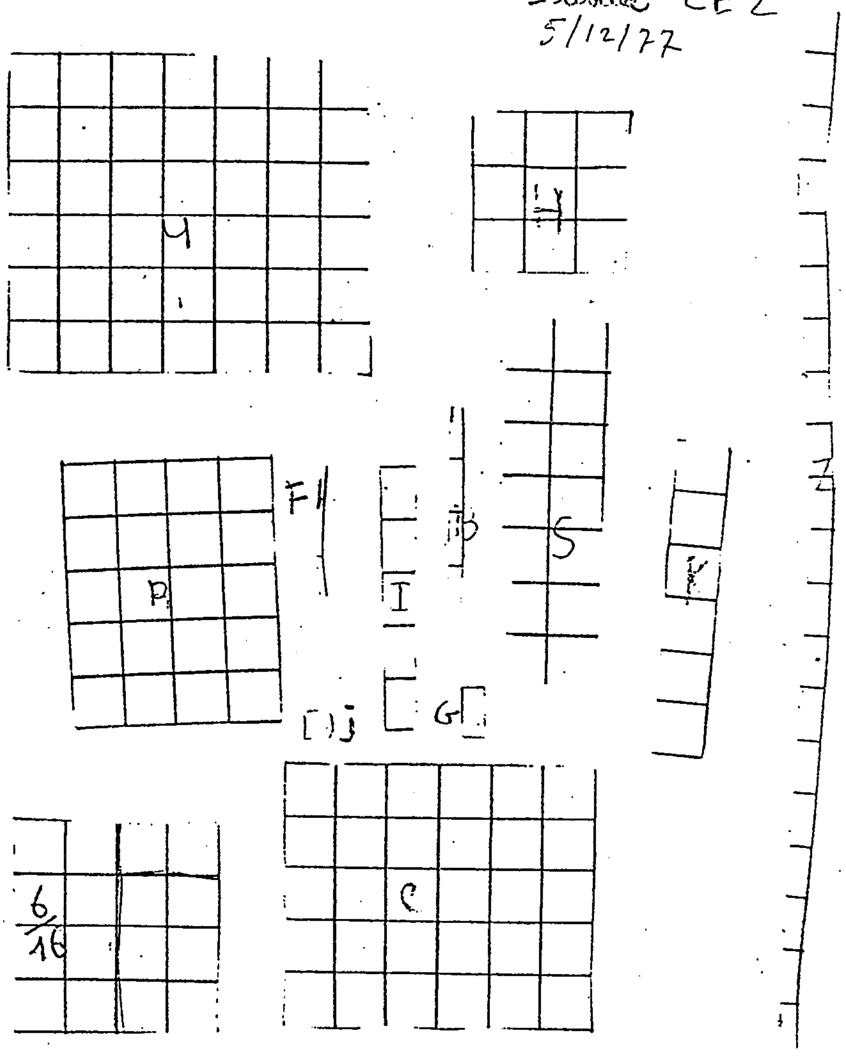




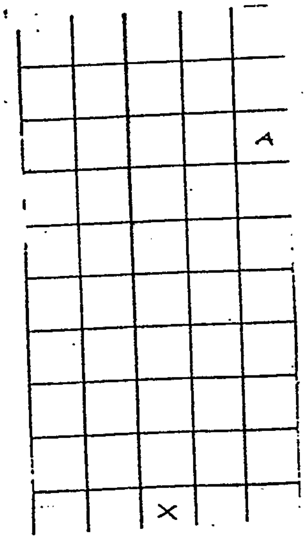


Isabelle CE2
5/12/77

	r	i	l	l	A
U	7	6	13	13	42
S	2	7	9	9	14
R	4	5	9	9	20
I	$\frac{1}{2}$	5	$5+\frac{1}{2}$		$2+\frac{1}{2}$
B	4	$\frac{1}{4}$	$4+\frac{1}{4}$		1
H	3	3^4	6^4		9
Z	20	$\frac{1}{2}$	$20+\frac{1}{2}$		10
C	6	5^2	11		30
F	3	$\frac{1}{8}$	$3+\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$
G	1	$\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
J	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1		
K	6	$1\frac{1}{2}$	6	77	



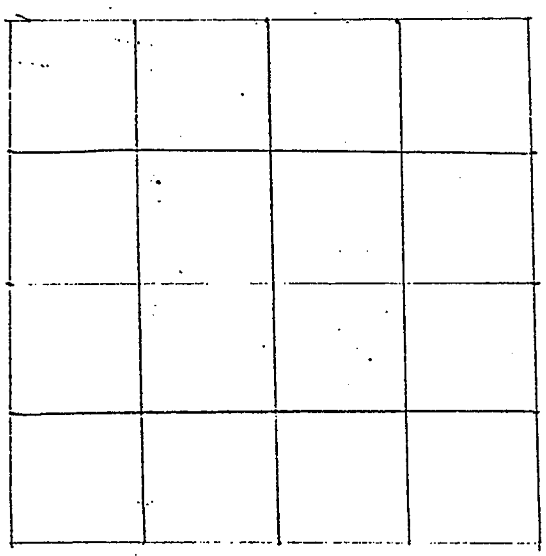
jacques lundi 5 décembre 1977 CE2

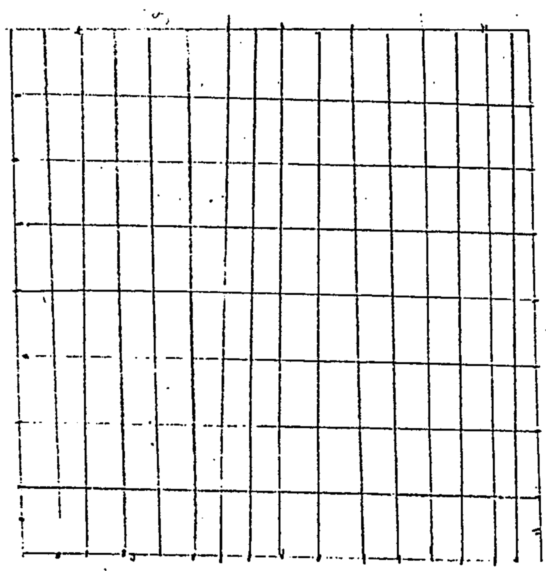


A = 10
X = 5

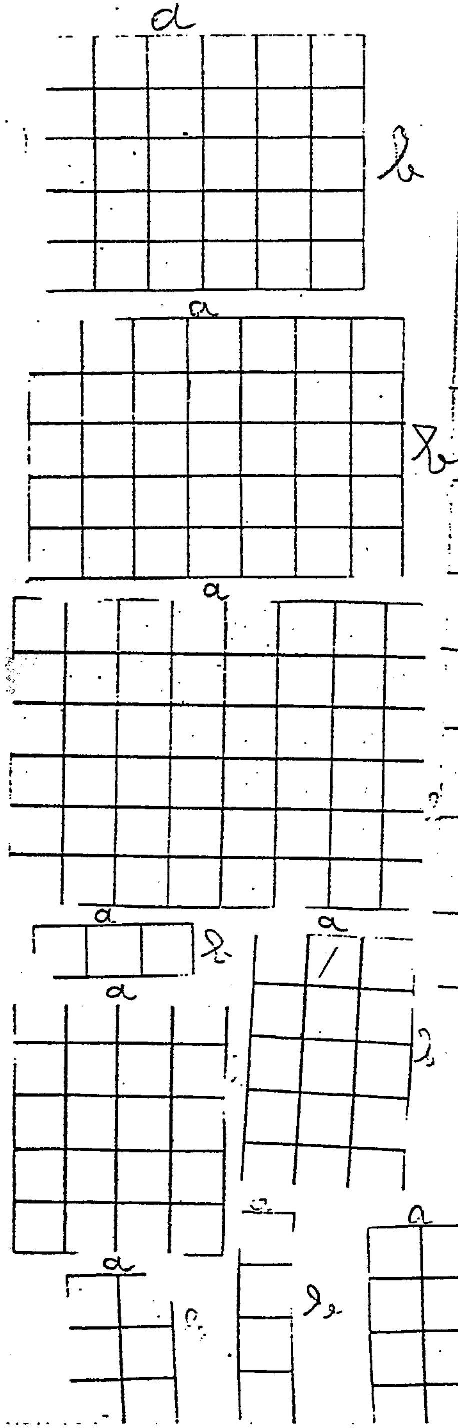
i	n	cl	Aire en carreaux

Jacques 5/12/77
CE2

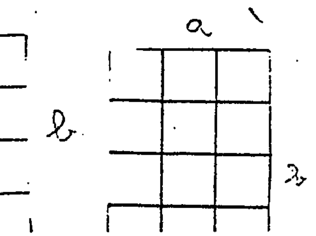




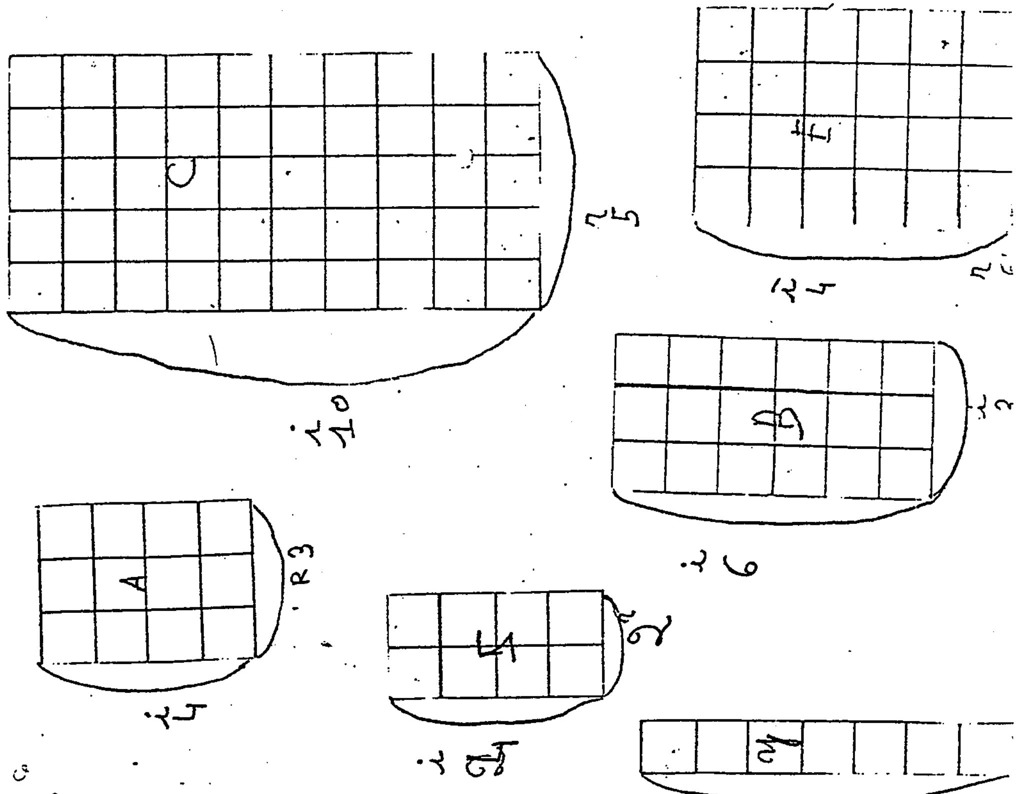
Kamel Lundi 5 décembre 1977 CE2

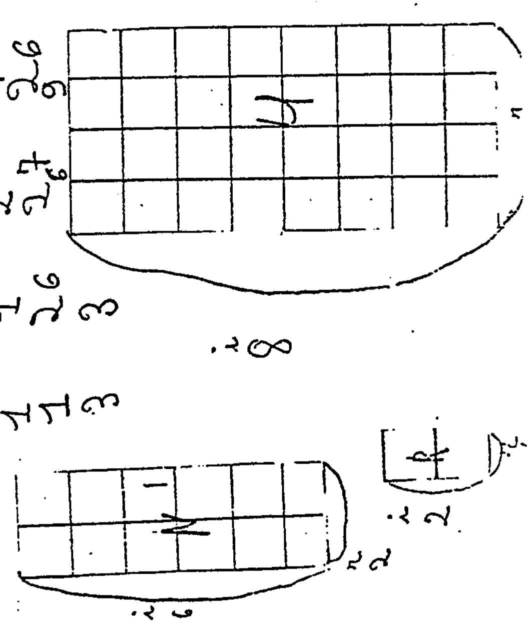


a	b	l	Aire
7	5	12	35
6	5	11	30
8	6	14	48
1	3	4	3
3	5	8	15
4	5	9	20
4	1	5	4
3	2	5	6
4	2	6	8
4	3	7	12

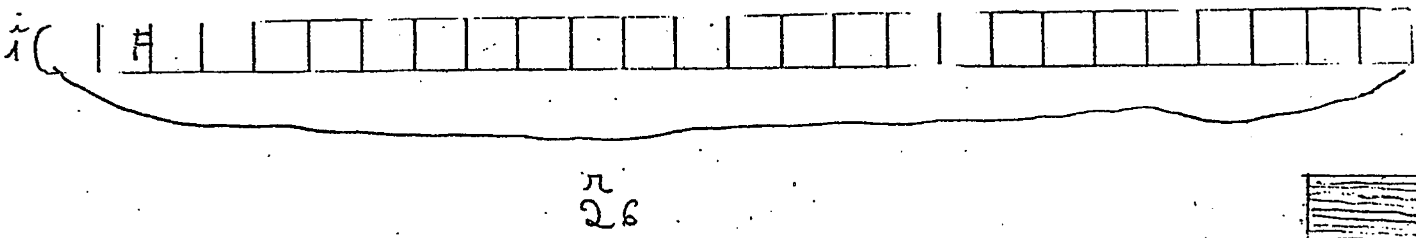


Laurent Lundi 5 Décembre 1977 CE2

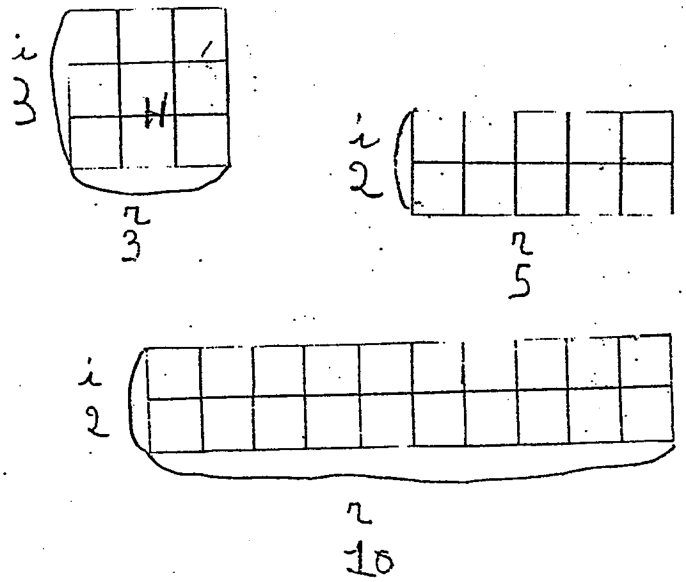


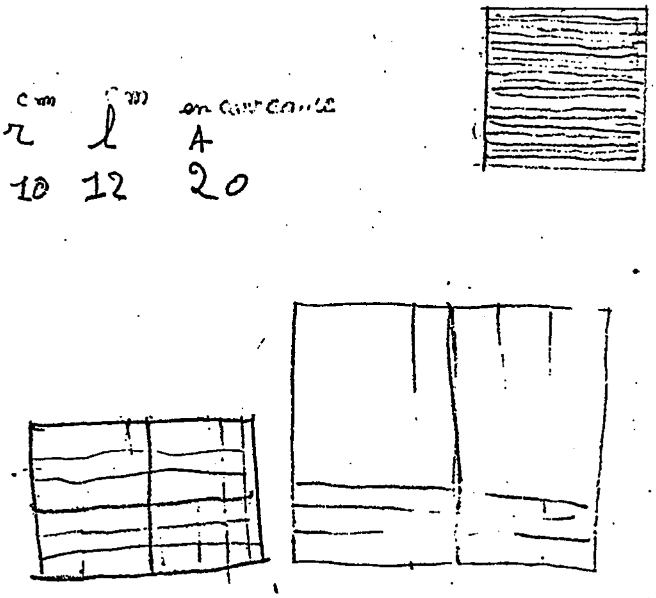


Laurent 5/12/77
CE2



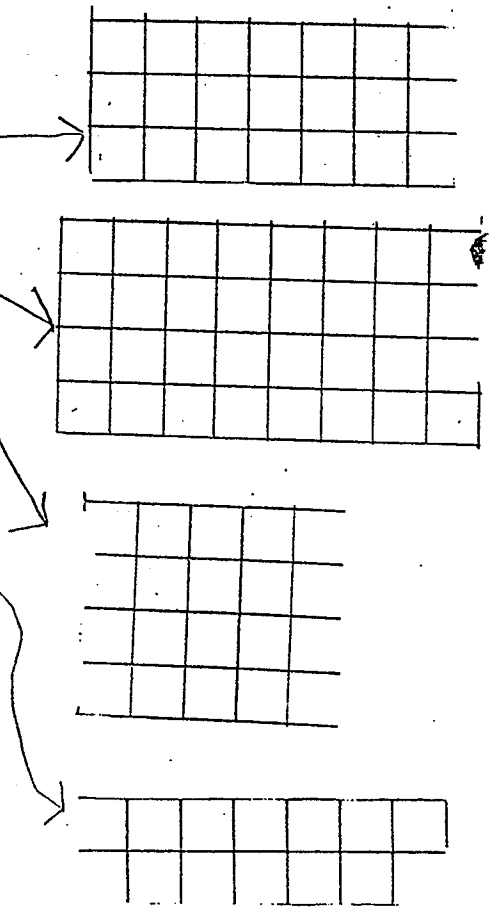
i (cm)	r (cm)	l (cm)	A (en carreaux)
2	10	12	20

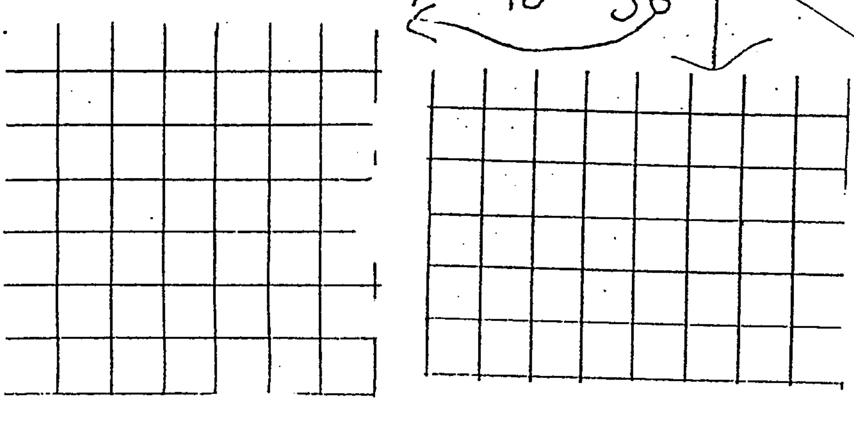




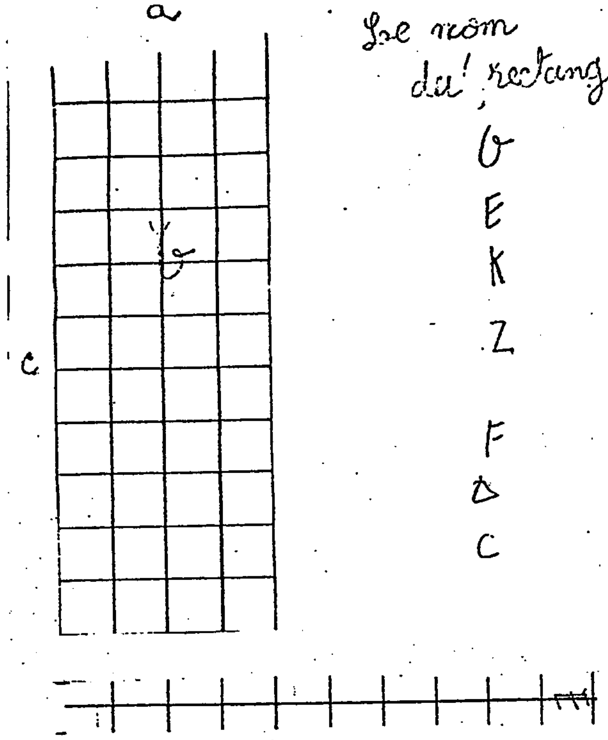
lidia lundi 5 novembre 77 CE2

a	b	R	Air
7	3	10	21
8	4	12	32
4	6	10	24
8	6	15	48
7	2	9	14
8	7	15	56

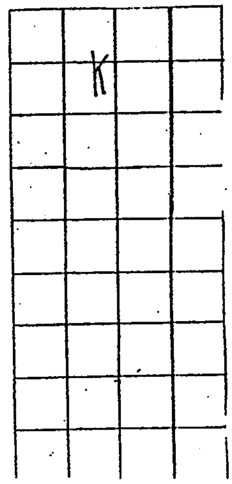




Louison
5/12/77
CE2

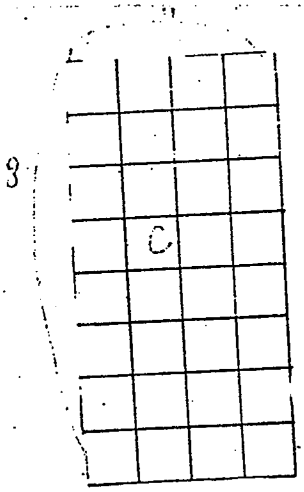


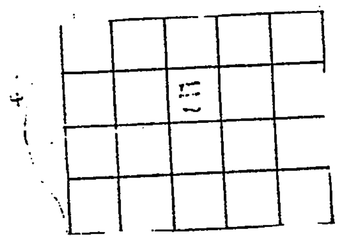
Le nom du rectange	a	c	l	A
O	4	11	15	44
E	1	$\frac{10}{2}$ = 5	6	5
K	4	9	13	36
Z	1	1	2	1 = inutée du carré
	1	4	5	4
F	$\frac{7}{2}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{28}{16}$	$\frac{49}{4}$
Δ				
C	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{45}{4}$

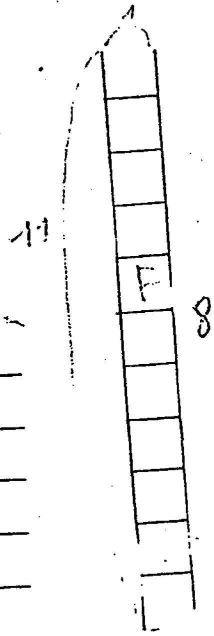


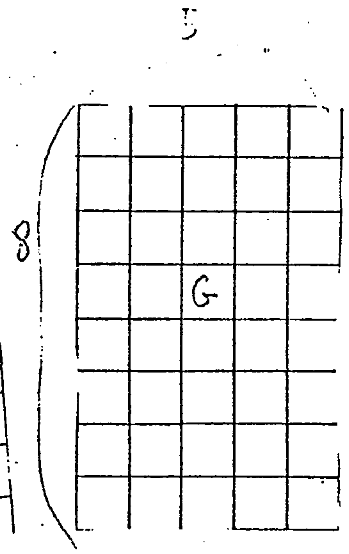
Marc
5/12/77
CE2

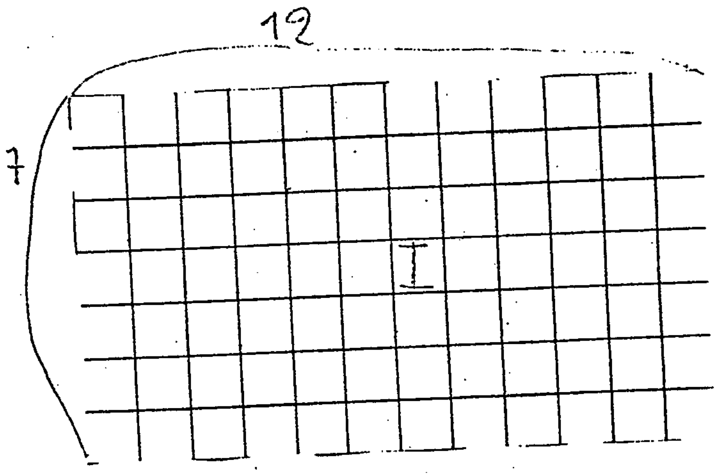
N	l	h	L	Aire en carreaux
C	4	9	12	36
E	5	4	9	20
F	1	11	12	11
G	5	8	13	40
I	12	7	19	84
Y	6	5	11	30
A				



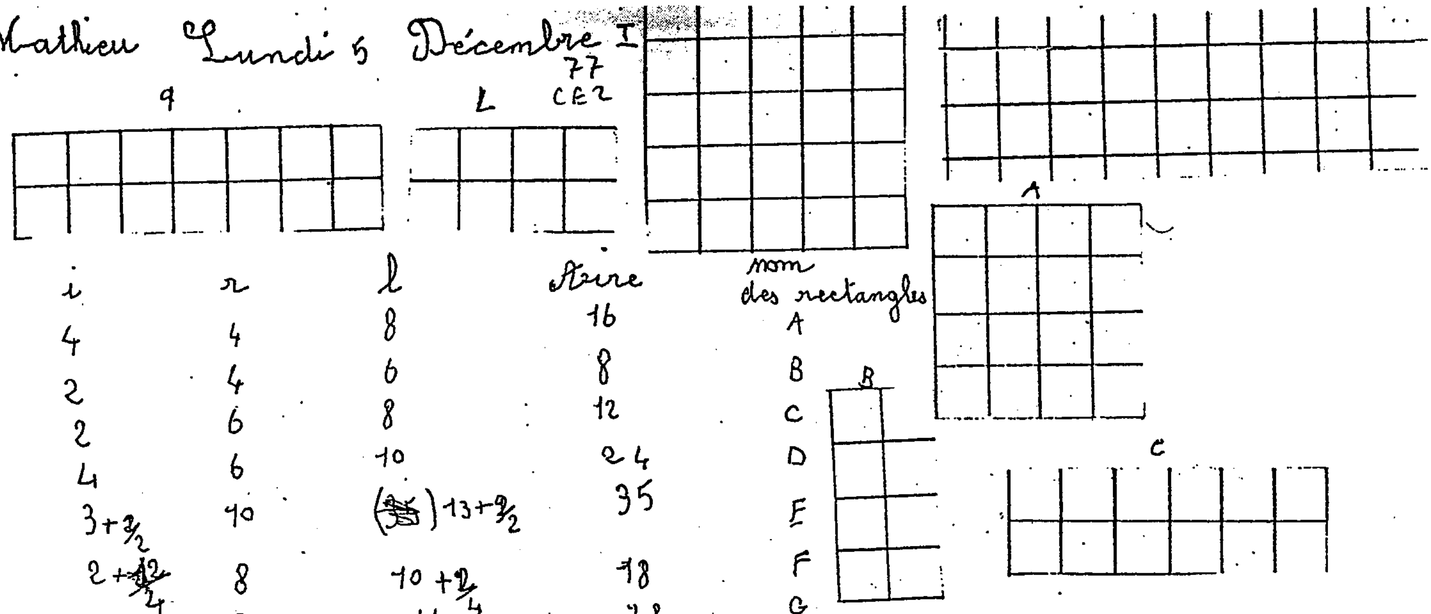




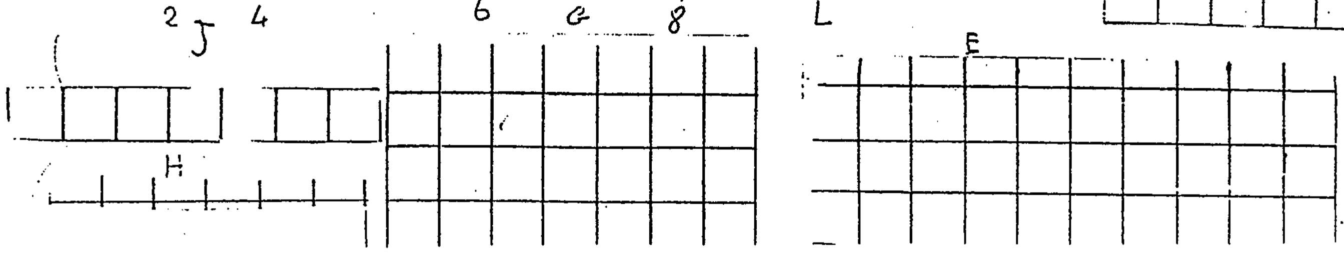




Mathieu Lundi 5 Décembre 77 CE2

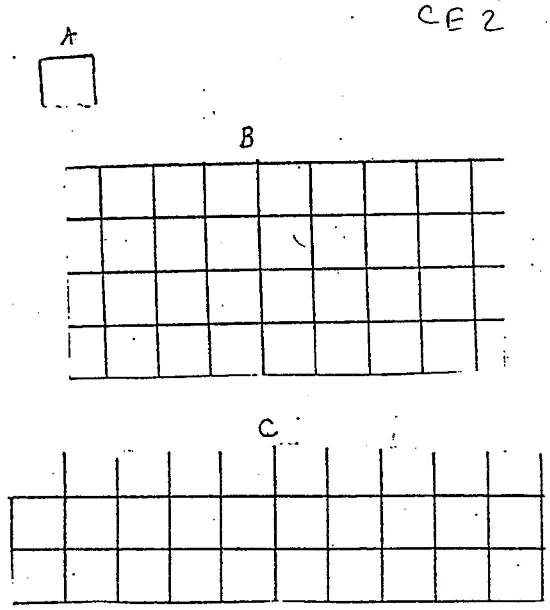


i	r	l	Aire	nom des rectangles
4	4	8	16	A
2	4	6	8	B
2	6	8	12	C
4	6	10	24	D
$3+\frac{2}{2}$	10	(~~35~~) $13+\frac{2}{2}$	35	E
$2+\frac{2}{4}$	8	$10+\frac{2}{4}$	18	F
4	7	11	28	G
$1+\frac{2}{2}$	6	$7+\frac{2}{2}$	9	H
5	6	11	30	I
1	7	8	7	J
2	7	9	14	K
2	4	6	8	L



Mathieu
5/12/77
CE2

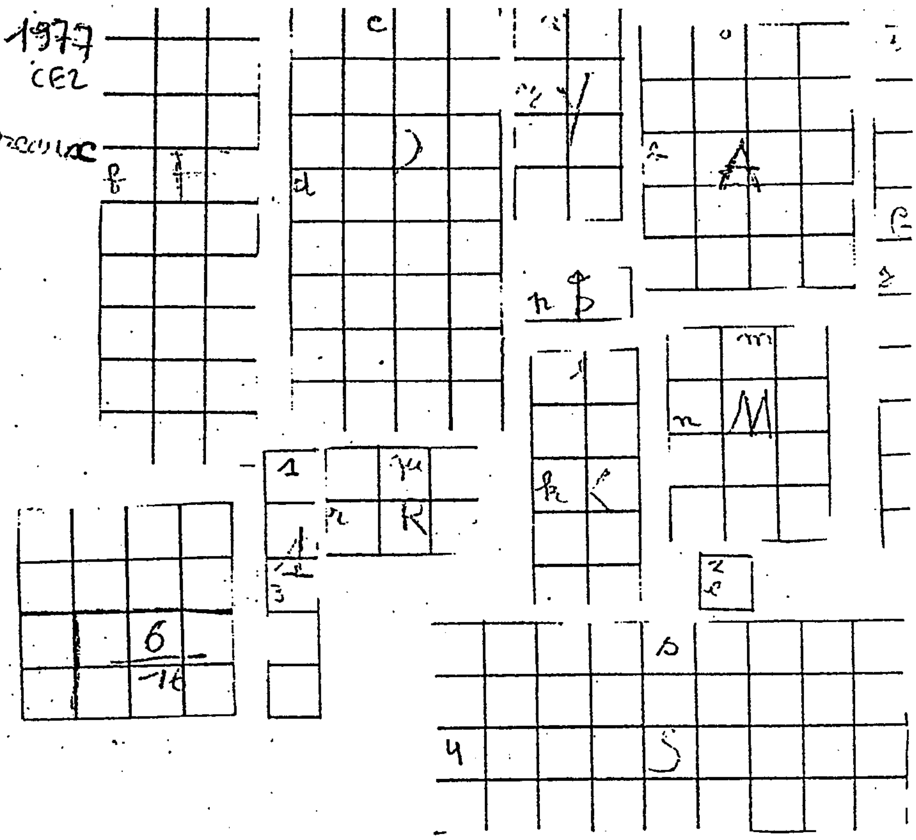
i	r	l	Aire	nom des rectangles
1	1	2	1	A
$\frac{4}{2}$	$7+\frac{2}{2}$	$7+\frac{6}{2}$	32	B
3	10	13	30	C



ounra • Lundi 5 Décembre 1977

CE2

i	k	l	Aire en carreaux
5	1	9	20
4	8	12	32
3	9	10	27
2	4	8	8
3	4	7	12
1	2	3	2
5	2	7	10
1	10	11	10
3	4	13	36
1	1	2	1
1	5	6	5

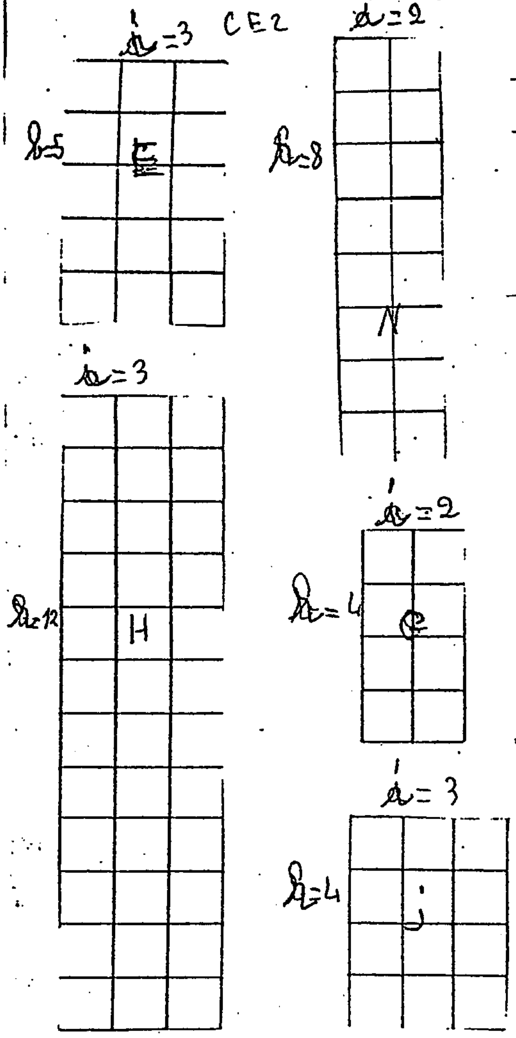


Sandrine Lundi 5 décembre 1977 CE2

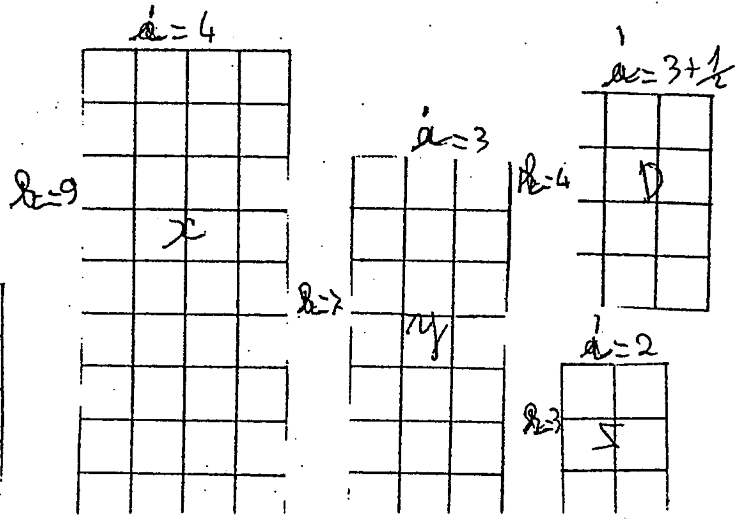
k	1	2	9
r	5	9	7
l	5	11	16
A	5	18	63

Valérie Xarré - Lundi 5 Décembre

CE2

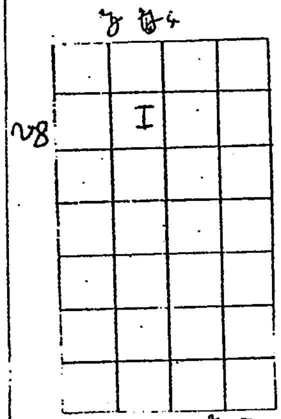


noms des rectangles	l	h	x	A
E	3	5	8	15
H	3	12	15	36
N	2	8	10	16
G	2	4	6	8
j	3	4	7	12
x	4	9	13	36
y	3	7	10	21
S	2	3	5	6
D	$3+\frac{1}{2}$	4	$7+\frac{1}{2}$	$12+\frac{4}{2}$

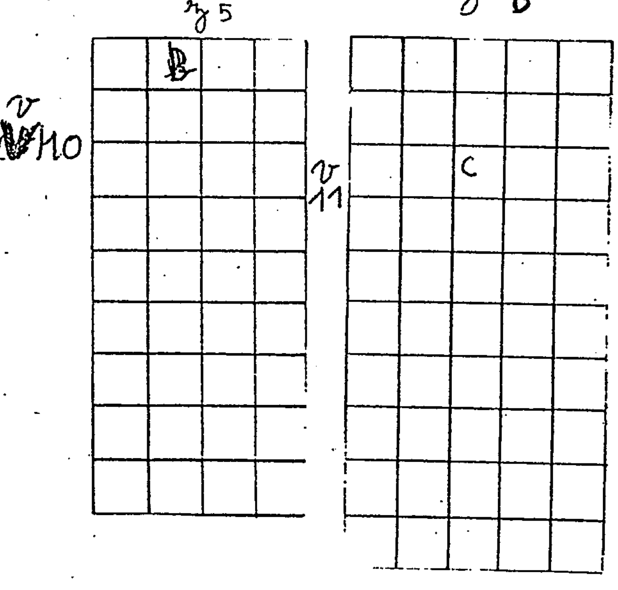


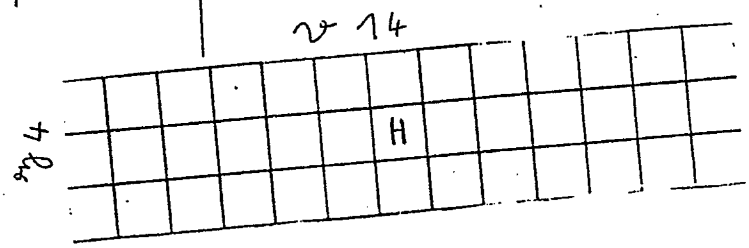
Yannick Lundi 5 Décembre 1977

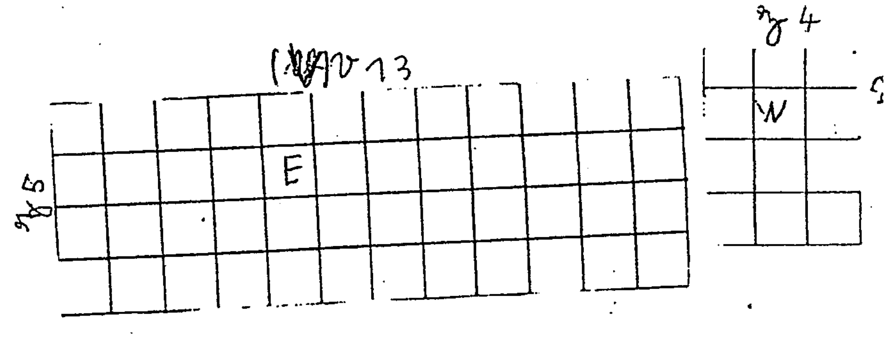
CE2



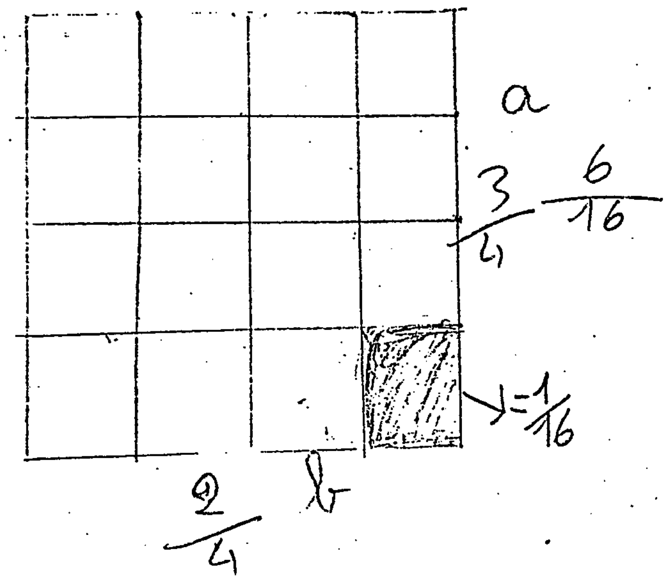
nom du rectangle	cm v	cm y	l	A carreaux
I	8	4	12	32
(b) B	10	5	15	50
C	11	6	17	66
E	13	5	18	65
H	14	4	18	56
W	5	4	9	20







Yannick
5/12/77 CE2



Virginie: Vendredi 25 novembre 1977 CE2

	i	l	r
A	2	8	6
F	4	8	4
M	1	8	7
□	5	8	3
*	7	8	1
⊙	6	8	2
D	-1	8	9
X	-2	8	10
Z	-7	8	15
Q	-4	8	12
[illegible]	3	8	11

	i	l	r
K	$\frac{1}{2}$	8	$7+\frac{1}{2}$
W	$5+\frac{1}{10}$	8	$2+\frac{9}{10}$
E	$2+\frac{5}{10}$	8	$5+\frac{5}{10}$

Virginie 28 Novembre 1977 CE2

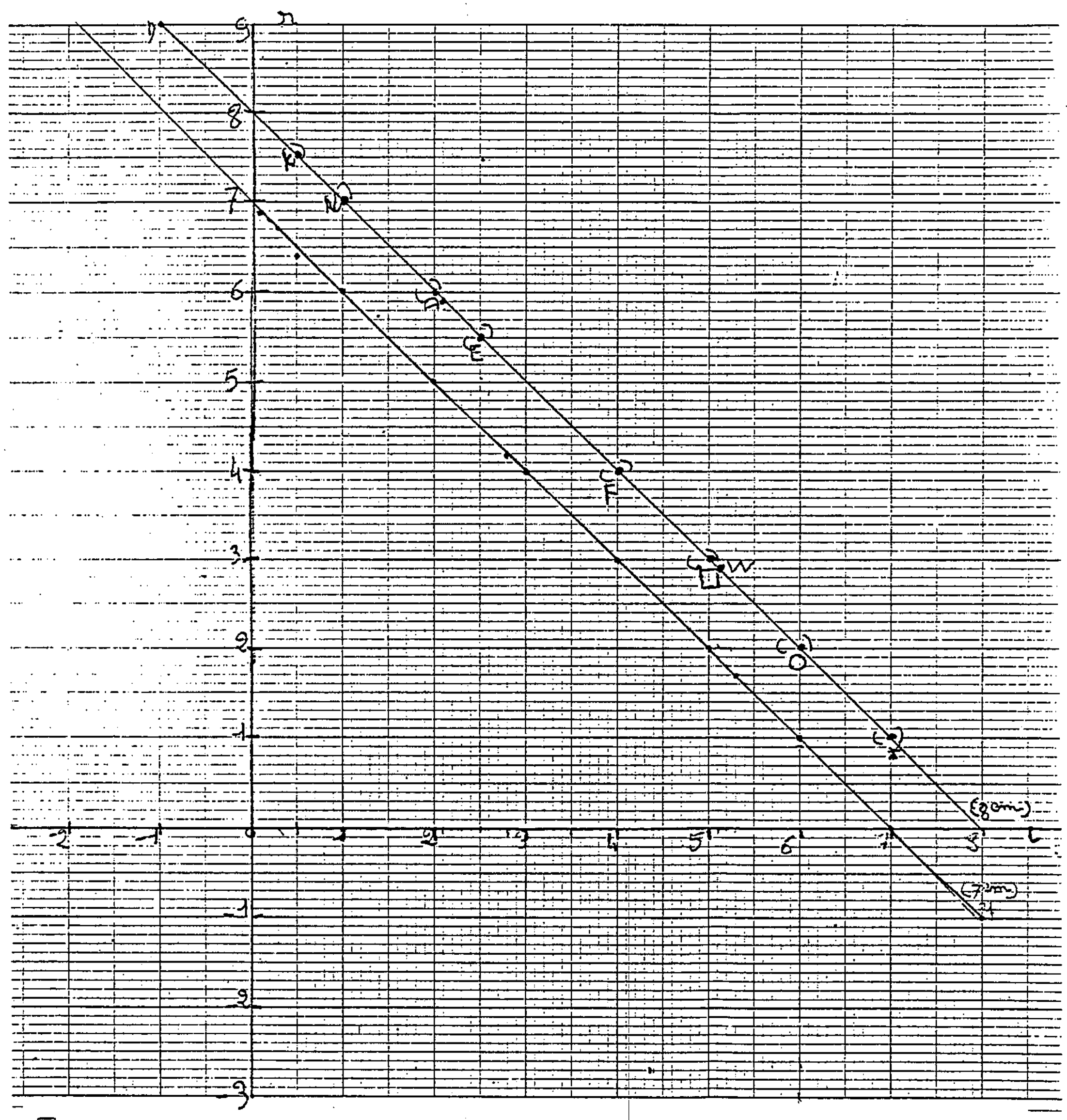
$l - i = r \; ; \; l = 7$

	l	i	r
l =	7	− 3	= 4
l =	7	− 7	0
l =	7	− 1/10	6 + 9/10
l =	7	− 2	5
l =	7	− 8	− 1
l	7	− 11	− 4 x
l	7	− 3/10	6 + 7/10
l	7	− 5/10	6 + 4/10
l	7	− 6	1
l	7	− 12	− 5 x
l	7	− 2 + 1/10	5 + 9/10
l	7	− 8 + 2/10	− 1 + 2/10
l	7	− 9 + 1/10	− 2 + 1/10
l	7	− 5	2
l	7	− 3 + 5/10	4 + 5/10
l	7	− 2 8/10	4 + 2/10
l	7	− 1	6
l	7	− 5 + 3/10	1 + 7/10
l	7	− 19	− 12 x
l	7	− 4	3
l	7	−	
l	7	− 9 + 2/10	− 2 + 2/10

$l - i = r$

	l	i	r
l	7	− 12 + 1/10	− 4 + 9/10
l	7	− 8 + 1/10	− 1 + 9/10
l	7	− 10 + 2/10	− 3 + 2/10
l	7	− 1 + 9/10	6 + 1/10
l	7	− 8 + 6/10	− 1 +
l	7	− 7	0
l	7	− 4/3	5 2/3

Virginie 28 Novembre 1977 CE2



Virginie 28 Novembre
CE2

La droite qui a pour le $\frac{1}{2}$ P 8 et celle qui a 7 pour le $\frac{1}{2}$ P (sont parallèles)
les deux droite ont un carreau de difference.
Sur la draite qui a pour le $\frac{1}{2}$ P 7 ~~ont~~ on peut faire ~~des rectangles~~ le $\frac{1}{2}$ P ; (6,1)(5,2)(4,3)(3,4)(2,5)
Sur la draite qui a pour le $\frac{1}{2}$ P 8 on peut faires ~~des rectangles~~ le $\frac{1}{2}$ P (1,6) ($\frac{1}{2}$, 6 + $\frac{1}{2}$)
(7,1)(6,2)(5,3)(4,4)(3,5)(2,6)(1,7)($\frac{1}{2}$, 7 + $\frac{1}{2}$

Virginie : Vendredi 2 descembre 1977 CE2

$i = 2 - n$

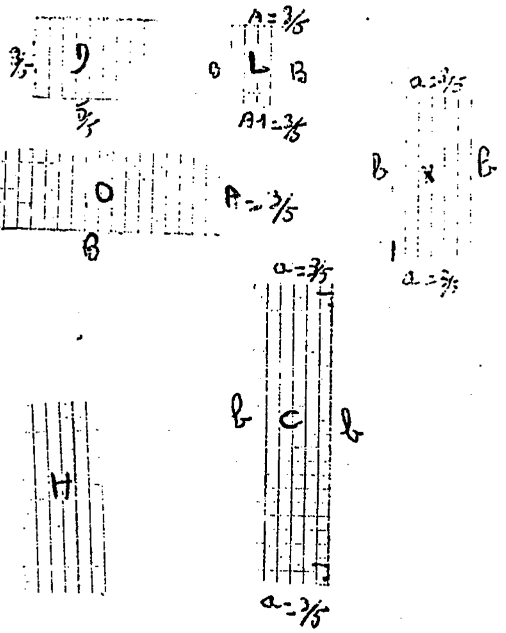
	= 2	− n
1	2	1
$\frac{1}{2}$	2	+ 1 + $\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$	2	1
− 2	2	4
− 3	2	5
9	2	− 7
11	2	− 9
5		− 3
7		− 5
12		− 10
10		− 8

Virginie, jeudi 8 decembre 1977 CE2

$a = 3/5$

	$a = 3/5$	b	$l = 1/2\,P$ (aire)	$A = a \times b$ (aire)
CM				
D1	3/5	5/5 = 1	1 + 3/5	15/25
D2	3/5	10/5 = 2	2 + 3/5	30/25
[illegible]	3/5	2/5	5/5 = 1	6/25
X2	3/5	6/5	9/5 = 1 + 4/5	18/25
[illegible]1	3/5	11/5	14/5 = 1 + 4/5	33/25
H1	3/5	7/5	10/5 = 2	21/25
F	3/5	20/5 = 4	23/5 = 4 + 3/5	60/25
G	3/5	23/5 = 4 + 3/5		
I	3/5			
J1				
K				
N				

$(A) = (a \times b)$



$y = (3/5 \times x)$ - $\boxed{y = l'aire \quad z = A}$

$(l =)\ (3/5 + b)$

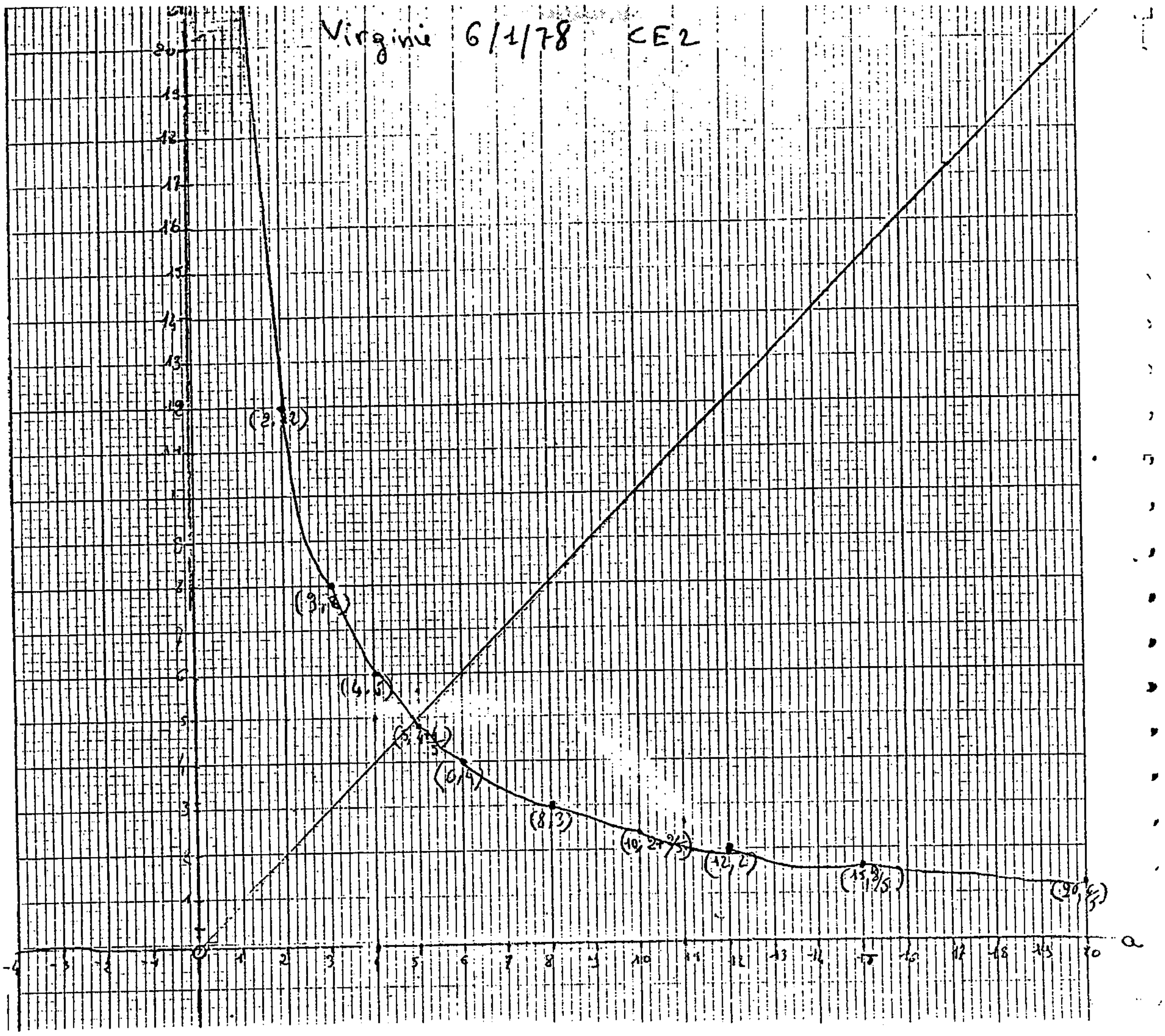
$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 15 \\ \hline 75 \\ +150 \\ \hline 225 \end{array}$$

Virginie : Mardi 13 decembre 1977 CE2

$a = 7/10$

$\frac{7 \times 10}{10 \times 10} = \frac{70}{100}$ $\quad \frac{7}{10}$ 1

	$a = 7/10$	b	l	A_I
N				
D	7/10	10/10 = 1	17/10 = 1 + 7/10	70/100 = 7/10
E	7/10	9/10	16/10 = 1 + 6/10	63/100
N1	7/10	2/10	9/10	14/100
*	7/10	22/10	29/10 = 2 + 9/10	154/100
Z2	7/10	7/10	14/10 = 1 + 4/10	49/100
W1	7/10	3/10	10/10 = 1	21/100
G	7/10	18/10	25/10	126/100
n1	7/10	1/10	8/10	7/10



a	b
1	24
4	6
2	12
3	8
1/2	48
1/4	96
1/5	120
1/10	240
1/3	72
1/6	144
1/9	210
1/12	
1/20	

$A = a \times b$

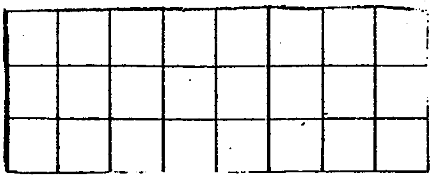
$A = 24$

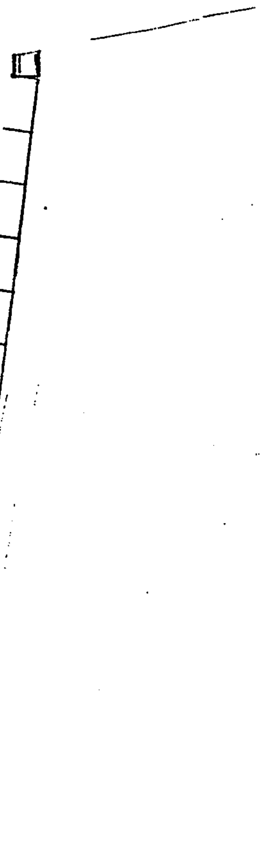
$A = 24$

Virginie 6/1/78 CE2

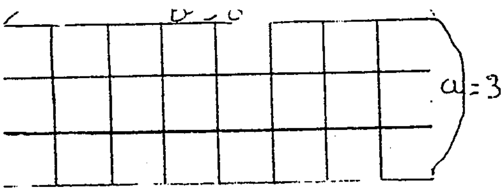
Virginie : jeudi 12 janvier 1978 ; CE2

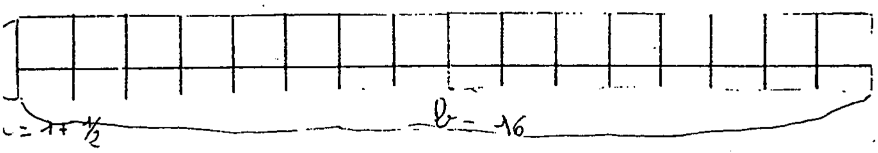
a	b	l	A
8	3	11	24
12	2	14	24
1	24	25	24
6	4	10	24
$\frac{1}{2}$	48	$48+\frac{1}{2}$	$\frac{48}{2}$ ($\frac{48}{2}=24$)
$\frac{1}{4}$	96	$96+\frac{1}{4}$	$\frac{96}{4}$ ($\frac{96}{4}=24$)





Virginie 12/1/78 CE2

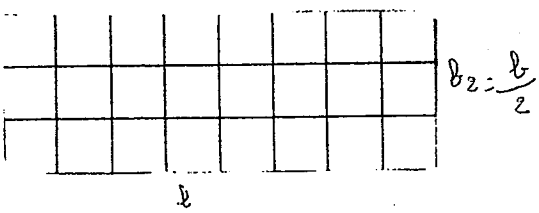


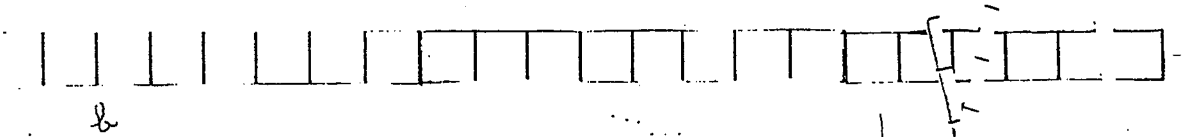


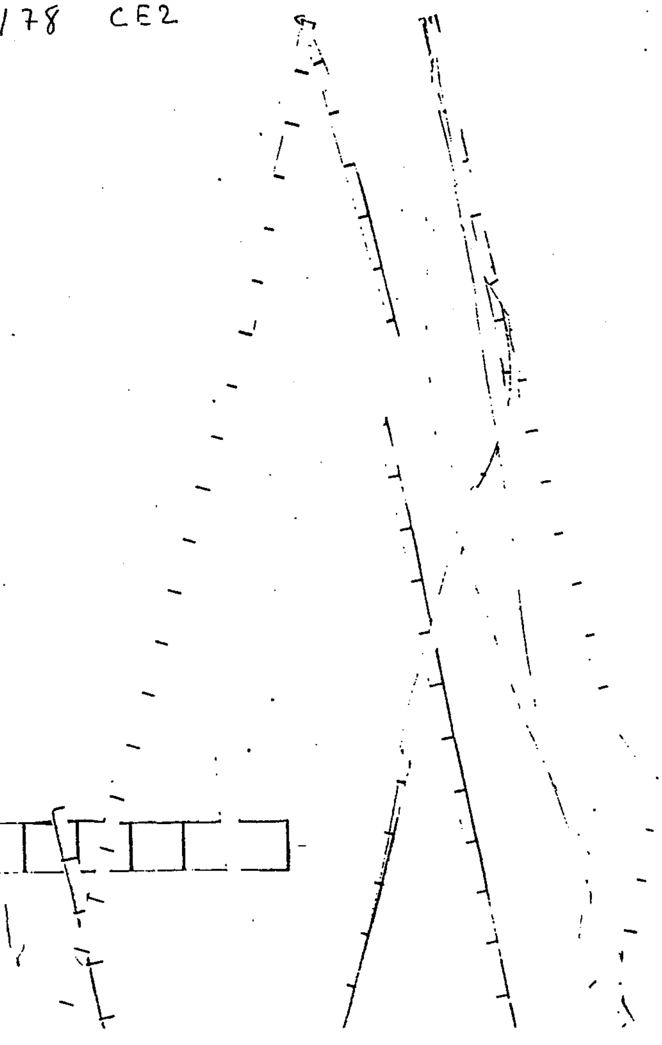
$a_1 = \frac{1}{2} \times a$

$b_1 = 2 \times b$

$a_2 = a \times 2$







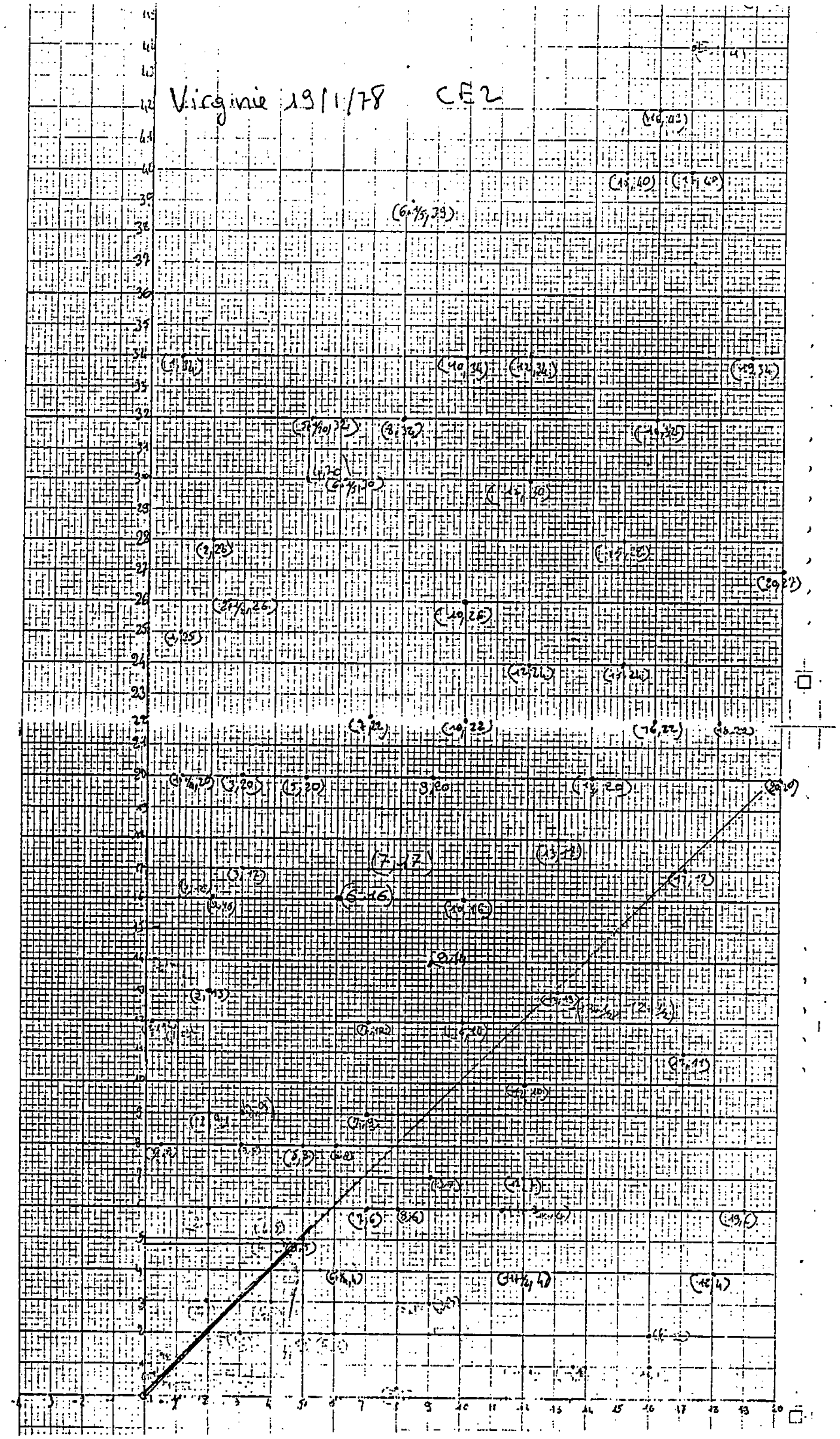
Virginie et hélène Jeudi 19 Janvier 1978 CE2

$f < 25 = \bullet$

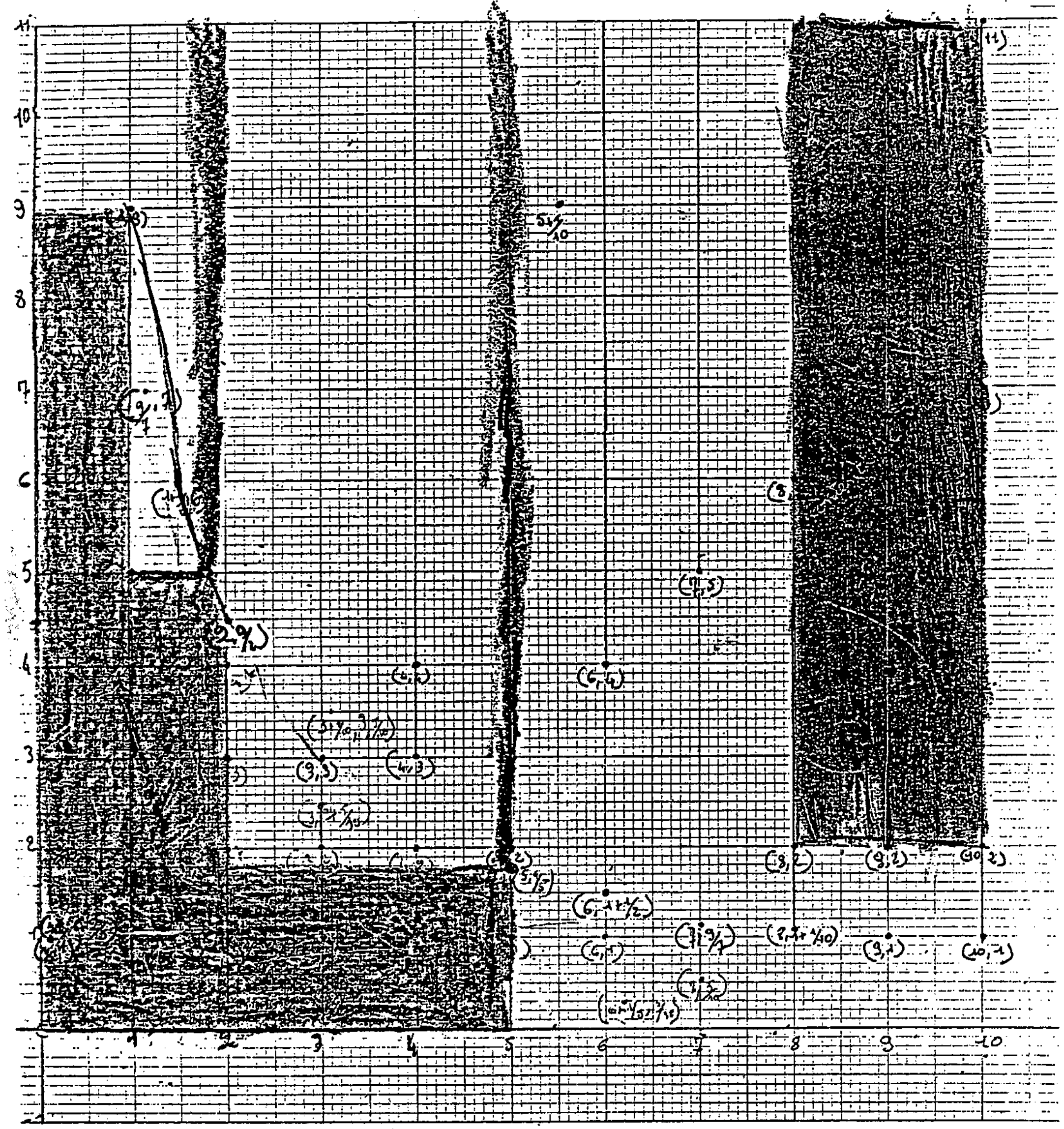
$f > 25 = \bullet$

$f = 25 = \bullet$

a	b	A
15	24	220
8	32	
13 + 1/2	12 + 2/5	
13 + 1/4		



Virginie 24/1/78 CE2



Virginie Mardi 24 Janvier 1978 CE2

$(8 \times 2) > 9$

$(9 \times 2) > 9$

$(10 \times 2) > 9$

(8, 2) jusqu'a (10, 2) ~~se~~ sera > 9

↓
rouge

$(1 + 1/2, 6)$

$(5, \frac{9}{5})$

$(7 \times b = 9$

$b = \frac{9}{7}$

$\frac{7}{10} \times b = 9$

$b = \frac{90}{7}$

$\frac{2}{5} \times b = 9$

$b = \frac{45}{2}$

$\frac{2}{7} \times b = 9$

$b = \frac{63}{2}$

$7 \times b = 9$

$b = 9$

Virginie Mardi 24 janvier CE2

a	b	A
$1 + 1/5$	$2 + 1/5$	$2 + 1/10$

$\frac{4}{5}$ $b = 9 \times \frac{5}{4}$

$b = \frac{45}{4}$

$\frac{6}{10}$ $b = 9 \times \frac{10}{6}$

$b = \frac{90}{6}$

$\frac{7}{8}$ $b = 9 \times \frac{8}{7}$

$b = \frac{72}{7}$

$\frac{3}{4}$ $b = 9 \times \frac{4}{3}$

$b = \frac{36}{3}$

$6 + 1/5$ $\times$ $9/10$

$\frac{5}{7}$ $b = 9 \times \frac{7}{5}$

$b = \frac{63}{5}$

$\frac{4}{4}$ $b = 9 \times \frac{4}{4}$

$b = \frac{36}{4}$ =

b A

$\frac{5}{5}$ $b = 9 \times \frac{5}{5}$

$b = \frac{45}{5}$

$b = 9$

$\frac{6}{6}$ $b = 9 \times \frac{6}{6}$

$b = \frac{54}{6}$

$b = 9$

$\frac{12}{10}$ $b = 9 \times \frac{10}{12}$

b $\frac{90}{12}$

---

camilo vendredi 20 janvier 13+8 CE2

a b

$1 + 9/10$

$\frac{20}{5} \times b = 9$

$\frac{9}{5} \times b = 9$

$\frac{45}{9} = 5$

$\frac{7}{5} \times b = 9$

$\frac{63}{5} \times \frac{7}{5}$

$45 \times 9 = 405$

$48 \times 9 = 432$

$\frac{45}{5} \times b = 9$

$\frac{405}{5}$

$\frac{48}{5} \times b = 9 \times \frac{5}{48}$

$\frac{432}{5}$

$\frac{45}{5} \times \frac{432}{5}$

90

a b

$\frac{7}{5}$ $9 \times \frac{5}{7}$

$\frac{20}{5} \times b = 9$

$b = \frac{9 \times 5}{20} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}$

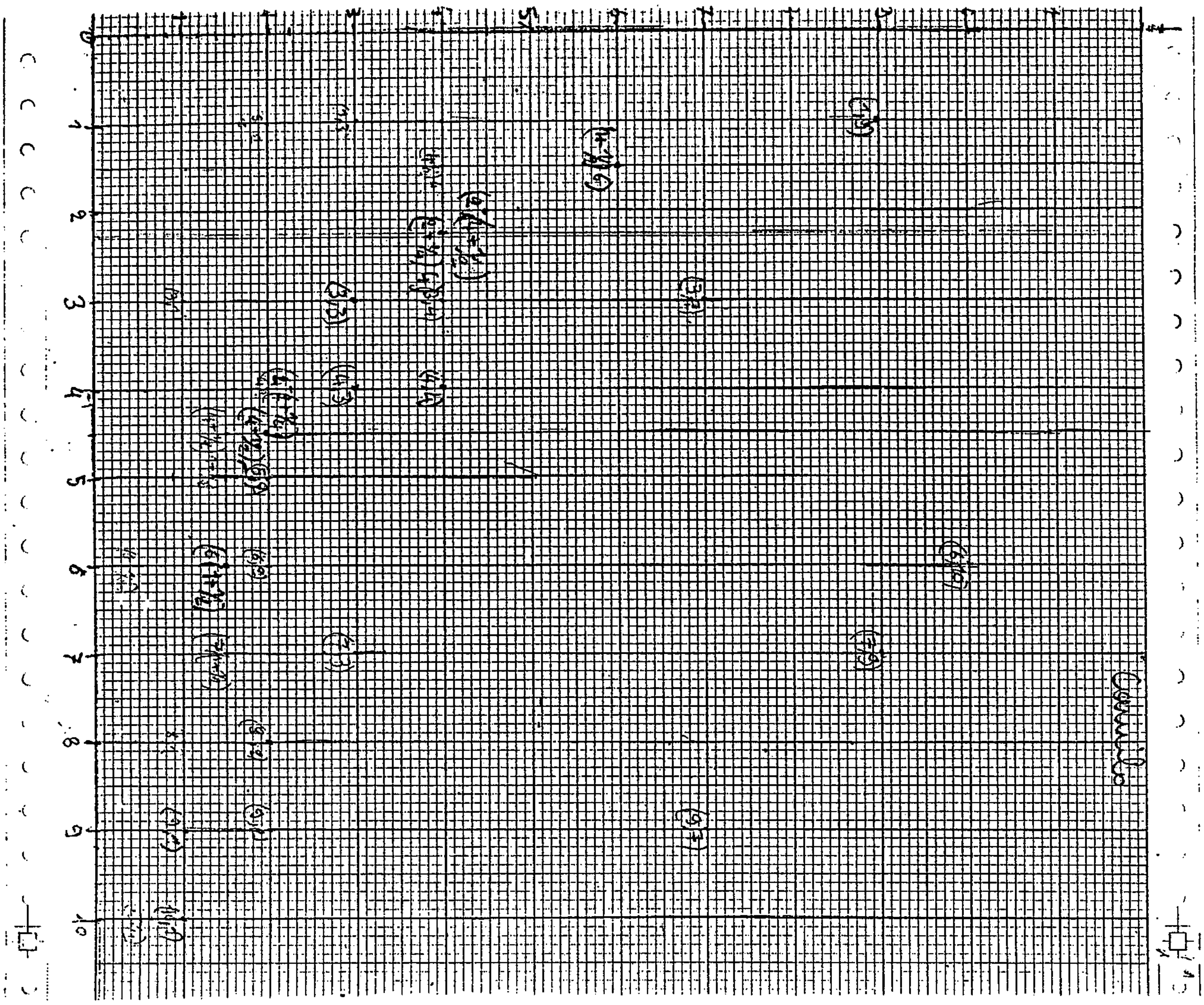
$56 \times 4 = 224$

$4 \times \frac{9}{4} = \frac{36}{4}$

$\frac{15}{5} \times b = 9$ $\frac{45}{15} = 3$

$\frac{15}{5} = 3$ $\frac{45}{15} = 3$

$3 \times 3 = 9$



Frédérique. Vendredi 20 janvier 1978 CE2

$(3 \times 3) = 9$

$(9 \times 1) = 9$

$(1 \times 9) = 9$

$(4+\frac{1}{2}, 2) = 9$

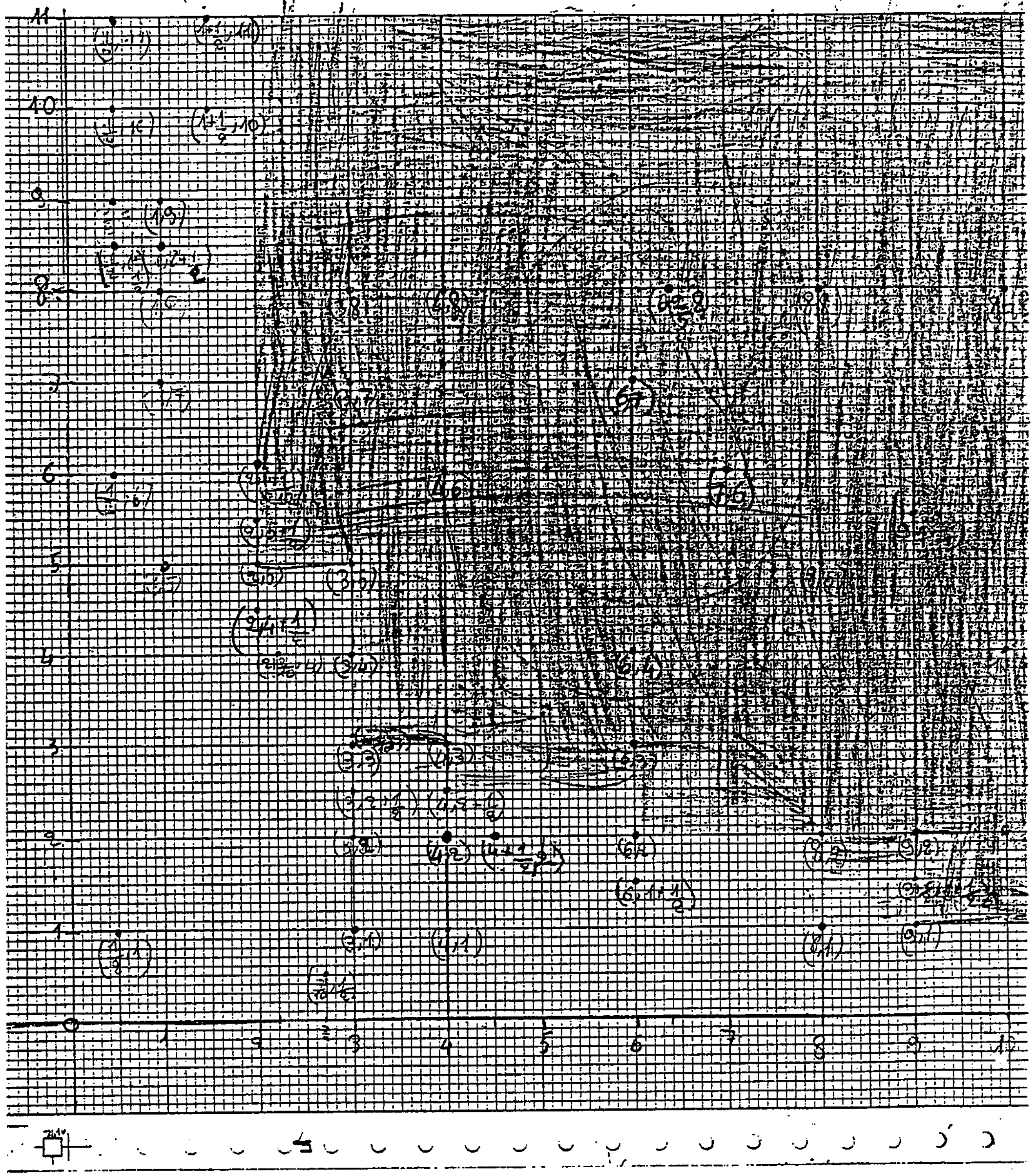
$(2, 4+\frac{1}{2}) = 9$

$(\frac{9}{2}, 2) = 9$

$(6, 1+\frac{1}{2}) = 9$

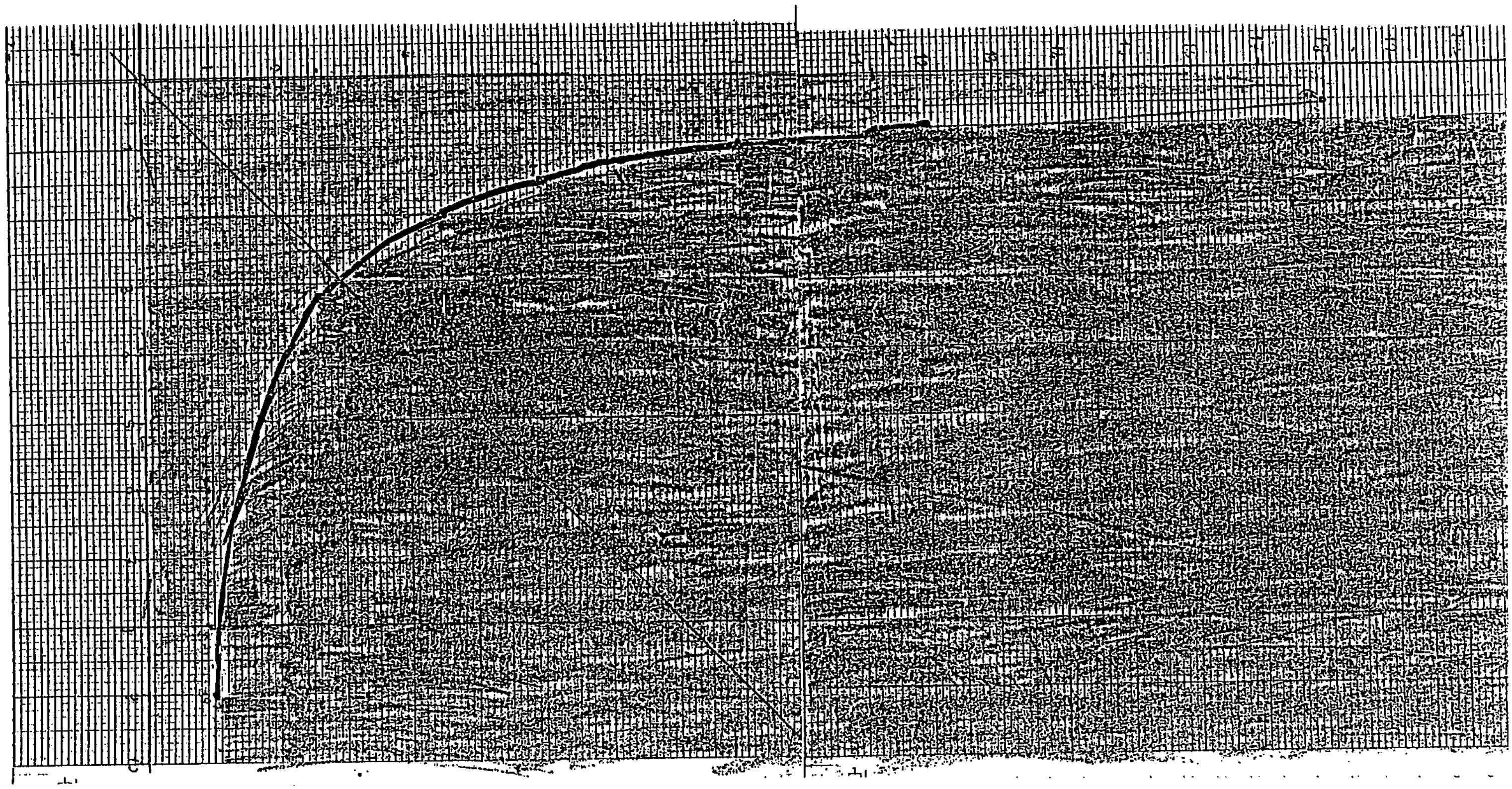
20/1/78 CE2

Frédérique



grégoire lundi 23 janvier 1978 CE2

Grigoire
23/1/78 CE2



hélène

$\left(1+\frac{1}{2} / 6\right)$

$\left(\frac{5}{7}, \frac{63}{7}\right)$

a

$\left(\frac{3}{5}, \frac{45}{3}\right)$

$\left(\frac{12}{10}, \frac{90}{12}\right) = \frac{45}{6}$

$\left(\frac{25}{10}, \frac{90}{25}\right)$ ~~a~~ $\frac{45}{12+\frac{1}{2}}$

$\frac{15}{4} \quad \underline{135}$

$(6, 1+\frac{1}{2})$ ~~Jon~~. Lundi Hélène
23/1/78 CE2

$(1+\frac{1}{2}, 6)$

$\left(\frac{3}{5}, \frac{45}{3}\right)$

$\left(\frac{12}{10}, \frac{90}{12}\right) \frac{45}{6}, \frac{22+\frac{1}{2}}{3}$

$\left(\frac{25}{10}, \frac{90}{25}\right) \frac{45}{22+\frac{1}{2}} \quad 3+\frac{15}{25}$

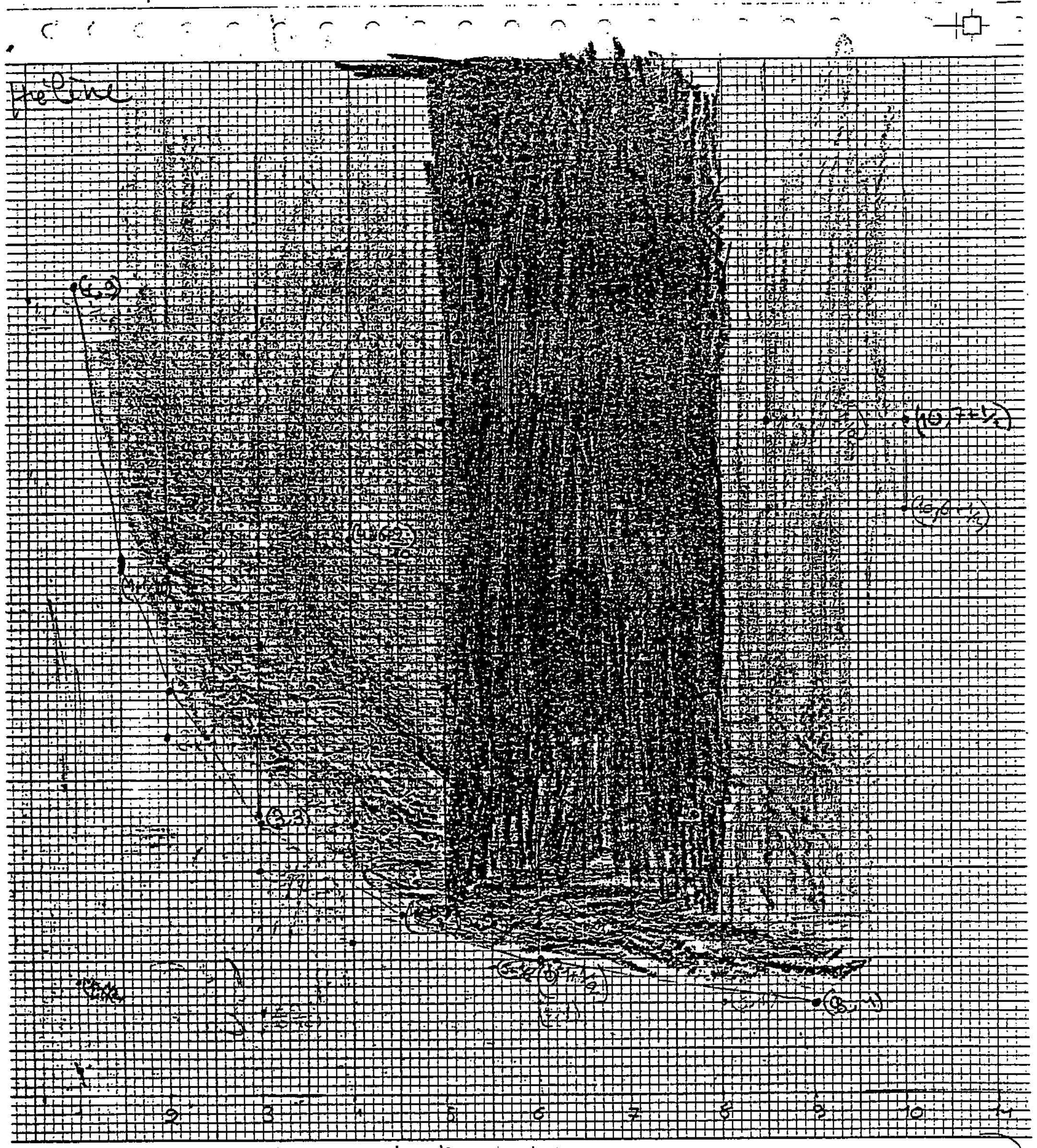
$\left(\frac{22}{10}, \frac{90}{22}\right) \frac{45}{11}$

$(2, 4+\frac{1}{2})$

$(4+\frac{1}{2}, 2)$

$\left(\frac{7}{10}, \frac{90}{7}\right)$

23/1/78 CE2

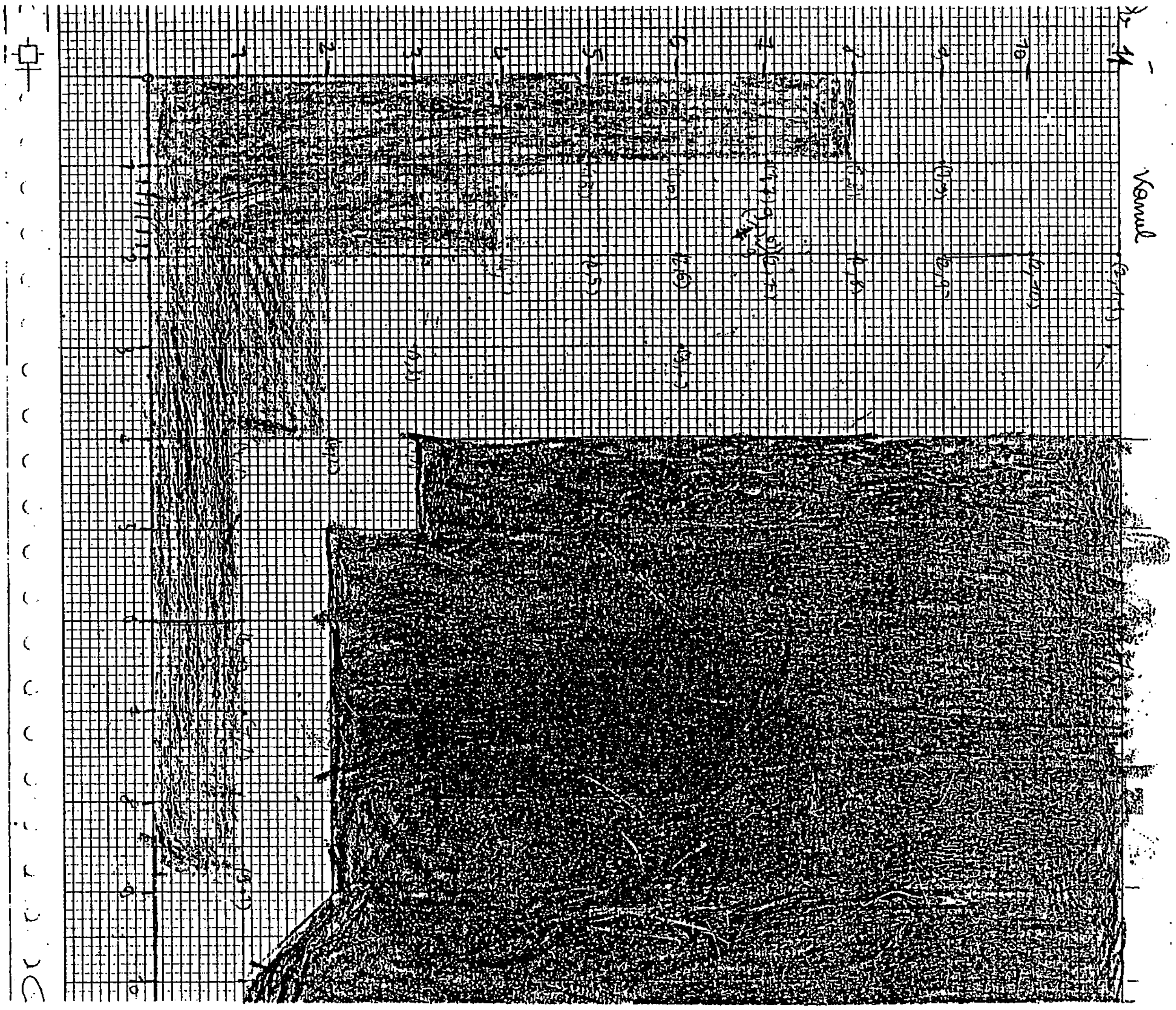


je me suis trompée j'ai mis trop de bleu

Kamel lundi 23 janvier 1978 CE2

20	3	9	18	36	72	36/3	90/6	63/9
2	3	1	1/2	1/4	1/8	3/4	6/10	9/7

23/1/78 CE2

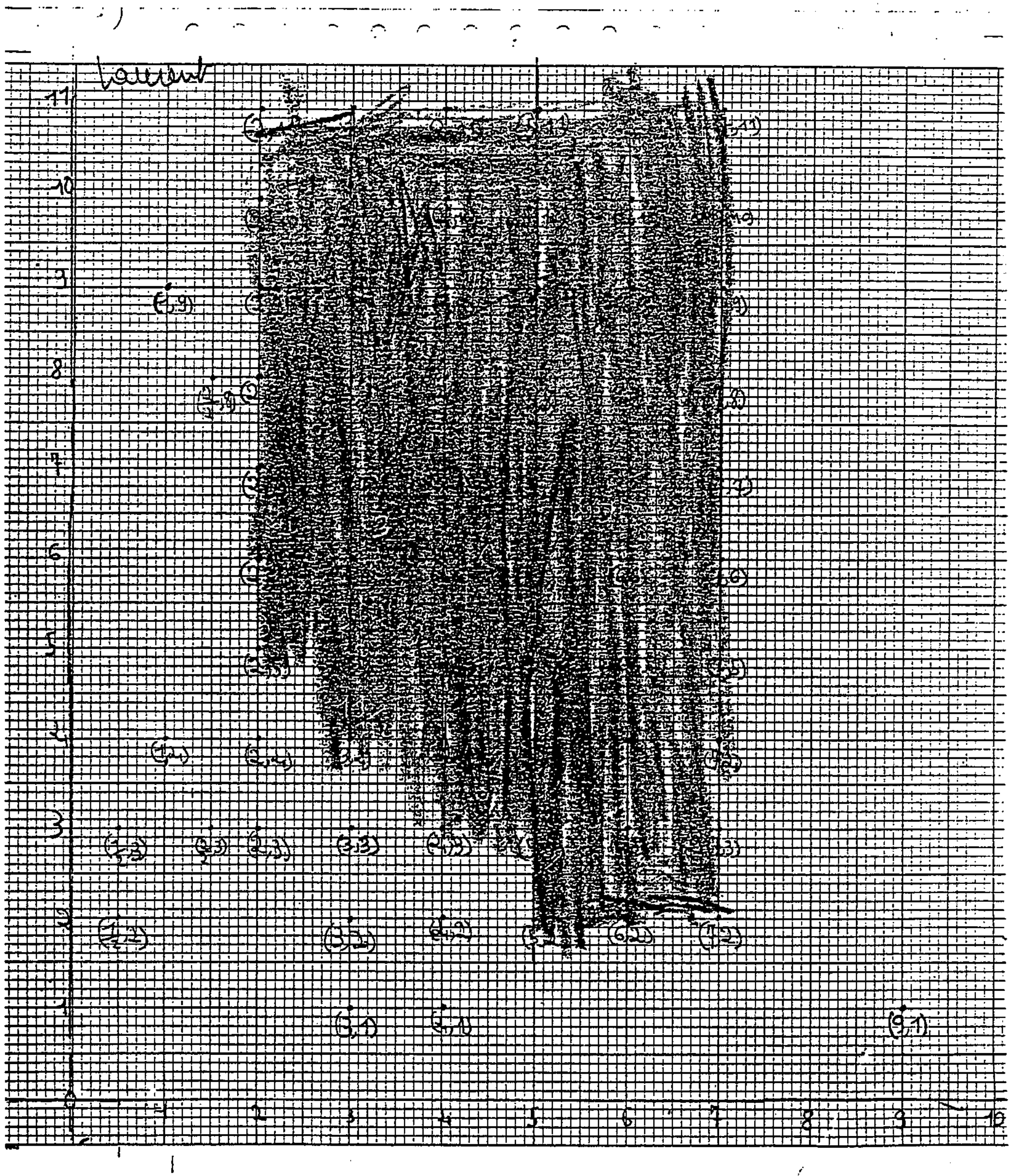


Laurent Lundi 23 Janvier 1978

a	b	A
1	9	9
3	3	9
9	1	9
$\frac{1}{2}$	18	9
$\frac{1}{4}$	36	9
$\frac{1}{5}$	45	9
$\frac{1}{6}$	54	9
$\frac{1}{7}$	63	9
$\frac{1}{8}$	72	9

a	b	A
$\frac{1}{3}$	27	9
$\frac{1}{9}$	81	9
$\frac{1}{10}$	90	9

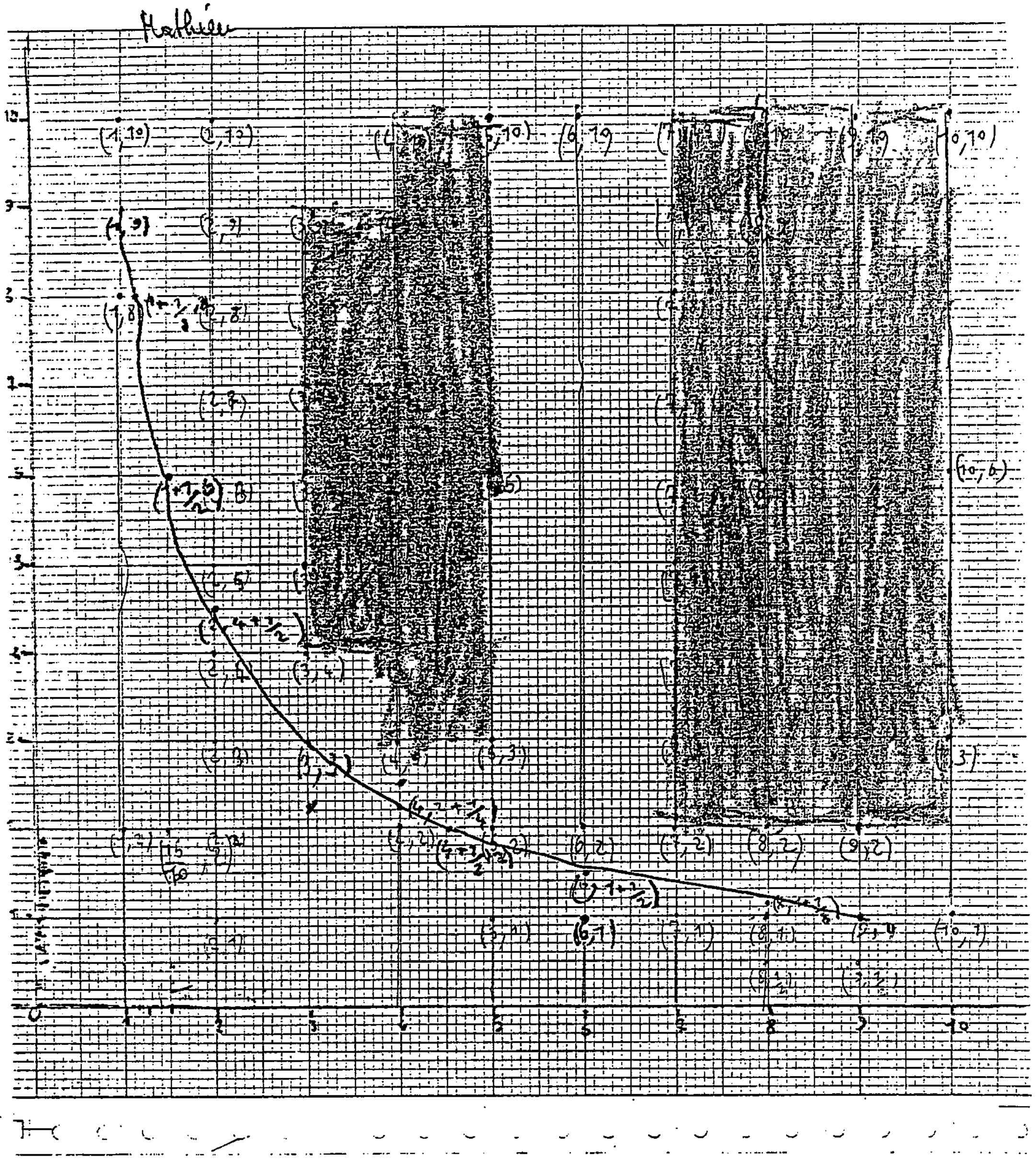
23/1/78 CE2



Mathieu 23/1/78 CE2

a	b
8	1+1/8
1+1/8.	8
1	9
2	1
3	3
4	4+1/2
4+1/2	2
4x	2+7/4

23/1/78 CE2



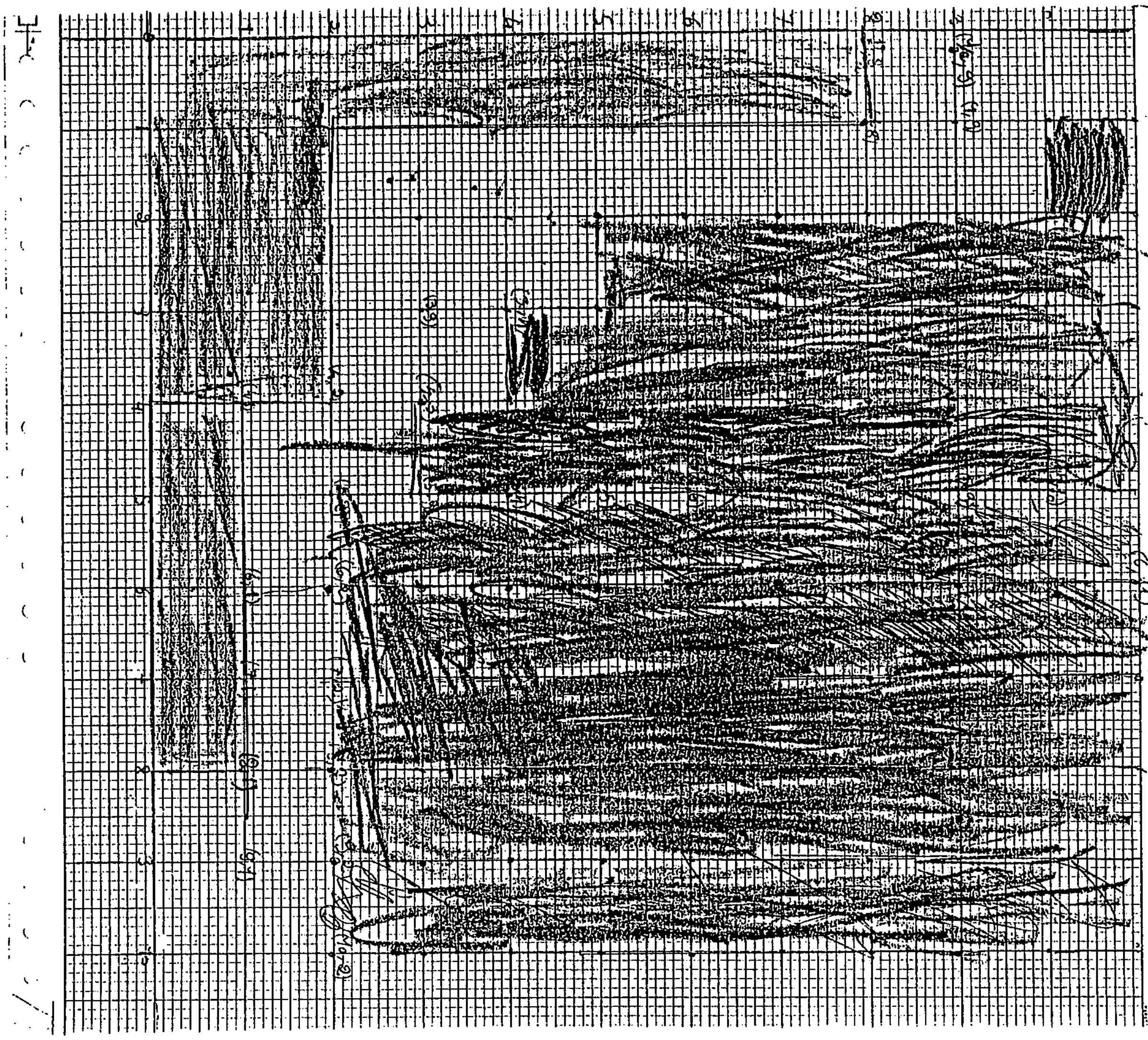
Sandrine Lundi 22 janvier 1978 CE2

$1/2 \times 18 = \frac{18}{2} = 9$

$1 \times 8 = 8$

23/1/78 CE2

Sandrine



$\frac{2}{5} \times b = 9$ Yannick Mardi 24 Janvier 1978 CE2

$b = \frac{45}{2}$

$a = 2$

$2 \times b = 9$

$b = \frac{1}{2} \times 9 = \frac{9}{2}$ $4 + \frac{1}{2}$

$a = \frac{25}{10}$

$\frac{25}{10} \times b = 9$

$b = \frac{90}{25}$

$\frac{90}{25} = \frac{18}{5}$

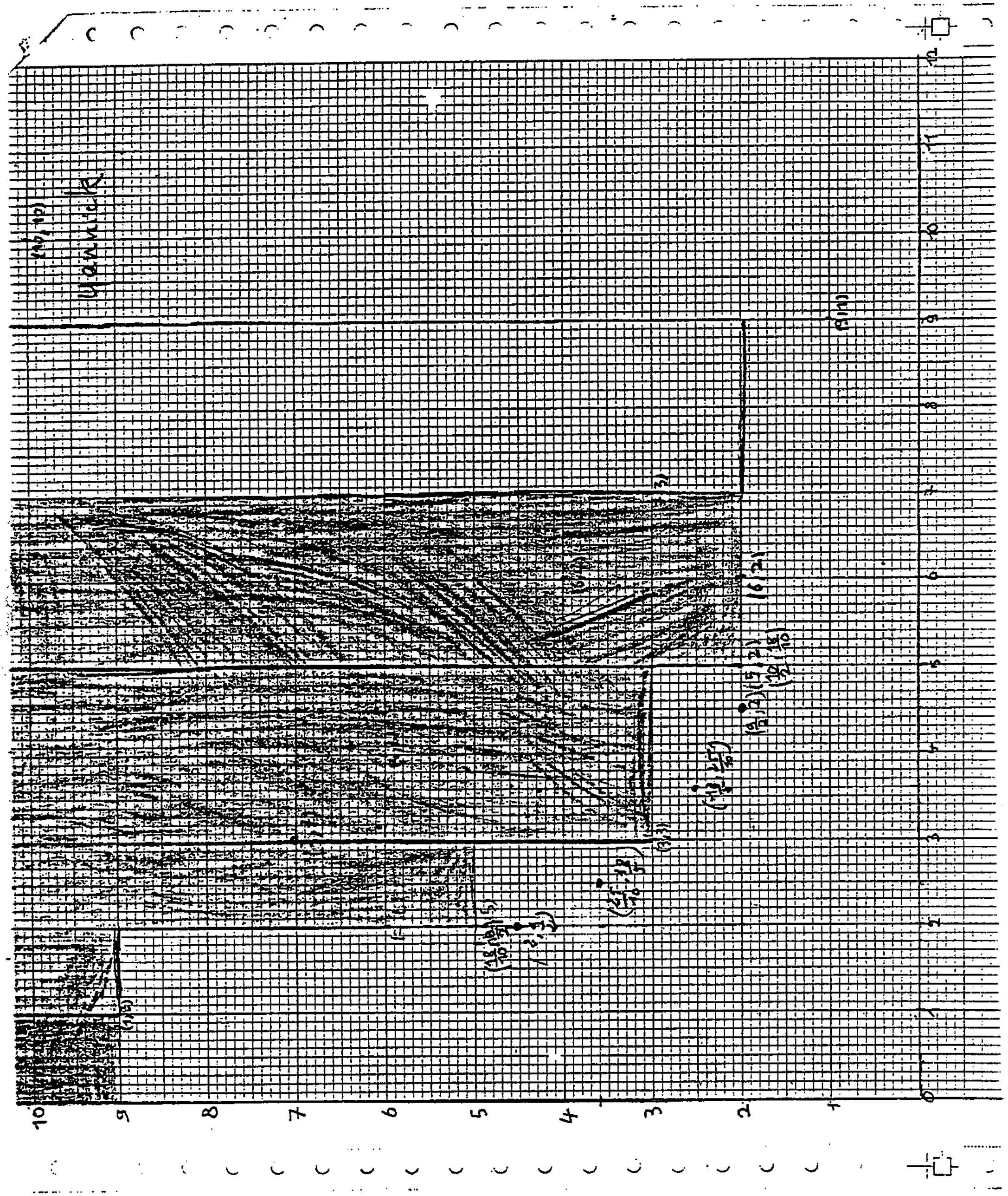
$\frac{10}{2} \times b = 9$

$b = \frac{18}{10}$ $\frac{9}{5}$

$\frac{1}{3} \times b = 9$

$b = 27$

24/1/78 CE2



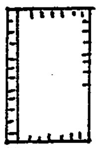
Annexe 2

3/2/77 CE1 Phase collective: compte-rendu du travail individuel.

Chaque élève a reçu une baguette de longueur u et construit un quadrillage. Certains rendent compte de leur construction. Ils sont à peu près représentatifs de l'ensemble des travaux de la classe.

Valérie a construit un quadrillage à maille carrée en se servant d'une des dimensions de son rectangle, mais elle ne sait plus dire laquelle. La maîtresse la renvoie "réfléchir" à sa place.

Olivia: "moi, mon patron, je l'ai plié en 4 , et puis après je l'ai mis ici et j'ai fait un petit trait, et je l'ai remis en bas et j'ai fait un petit trait, et de ce point là à ce point là j'ai tiré un trait. J'ai fait çà pour tous et après j'ai fait de l'autre côté."



M. : Très bien

Olivia: "du côté horizontal et du côté vertical."

M. : Très bien, seulement tu as fait une petite erreur. Tu as plié en 4 et après tu t'es trompée. Est-ce que tu as pris le quart de ta mesure?

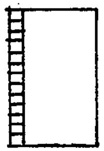
Olivia: "Non, j'avais pas pris le bon côté".

M. : voilà. On lui donnera un nom.

Valérie: J'ai aussi plié mon patron en 4 . Après, je l'ai posé sur le côté horizontal et j'ai mis un petit point. Je l'ai posé sur le côté vertical et j'ai mis un petit point aussi et j'ai relié.

M. : Tu l'as posé comme çà 2 fois tout le long?

Valérie: Non, non, après avec ma règle, quand j'ai fait toute cette ligne, j'ai pris 0 ici. J'ai mesuré la longueur du patron, j'ai trouvé 1cm et 4mm et j'ai reporté sur le bord horizontal et sur le bord vertical. Et j'ai relié.



M. repète le procédé de construction de Valérie en précisant le langage.

M. : Qui a fait d'une autre façon?

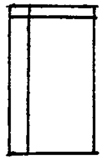
Florence: J'ai pris 1/2 .

M. : Elle a pris le demi patron.

Florence: Je l'ai posé sur ma feuille et après j'ai tiré mes traits comme çà.

M. : Tout autour?

Florence: Oui, quand j'ai fait tout le tour, j'avais plus besoin de mon petit u . Comme je savais que c'était de la même dimension, j'ai repris les traits et j'ai tiré.



M. : Tu les as continués?

F. : J'ai d'abord tiré le trait vertical et après le trait horizontal.

M. : Très bien.

Mathieu: J'ai fait la même chose.

M. : Viens nous montrer.

Mathieu: J'ai plié en 2 , çà dépassait un peu, j'ai mesuré et j'ai reporté la mesure.

Marc : Moi, je n'ai pas plié.

M. : Tu as gardé ta mesure entière?

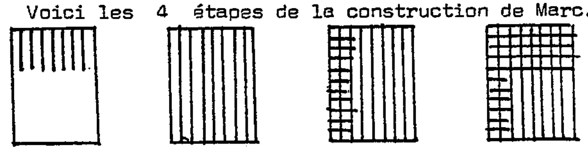
Marc : Oui. J'ai posé sur le côté vertical.

M. commente à haute voix ce qu'elle pense être la construction de Marc.

Marc : après, j'ai posé sur une ligne horizontale.

M. : Mais mon patron est plus grand que ton carreau. Comment as-tu fait?

Voici les 4 étapes de la construction de Marc.



Il a reporté la même dimension dans les 2 directions en tournant son patron. Il obtient ainsi un quadrillage à maille carrée de mesure la petite dimension du rectangle. Marc ne parvient pas à décrire sa construction; c'est finalement Bastien qui explique:" il a croisé son patron".

M. : Voilà le quadrillage de Frédérique. Est ce qu'il est carré celui-là?

F. : non, rectangulaire.

M. : On peut en avoir des carrés, des rectangulaires, on peut en avoir d'autres. Avez-vous des idées?

E. : des ronds

E. : des triangles. Avec des triangles, c'est facile.

E. : des losanges.

Bastien: Avec des losanges c'est facile.

E. : Avec des nombres.

M. : "Non, pour l'instant, on ne gradue pas le quadrillage. Seulement la maille; çà s'appelle la maille.

Celui-ci donc est rectangulaire."

Frédérique ne dit rien.

M. à F. : Tu as tracé des traits? des verticales? des horizontales? n'importe comment? Tu as pris une mesure?

A chaque question, Frédérique répond non.

M. : Elle a fait un quadrillage, une partie avec des petits côtés, une partie avec des grands côtés.

Récapitulation.

M. : Peut-il y avoir plusieurs sortes de quadrillages?

Le choeur: Oui

M. : Pour le quadrillage carré, combien de renseignements doit-on donner?

Olivia : Je ne sais pas, mais je sais quel renseignement on doit donner, parce que les 4 côtés sont pareils.

M. : Ils ont la même longueur. Alors, combien de renseignements doit on donner?

E. : 1 mesure.

M. : 1 mesure.

Virginie: Pour les rectangulaires il en faut 2 , parce que celui-là (geste) est plus petit que celui-là.

M. : Parce que ce côté est plus petit que l'autre. Au lieu de dire "ce côté", "celui-là", nous allons leur donner des noms.

Donc, pour envoyer le message, si c'est un carré, combien êtes-vous obligé de donner de renseignements?

Le choeur: 1

M. : si c'est un quadrillage avec des rectangles, combien êtes-vous obligé de donner de renseignements?

Le choeur: 2

M. : Voilà, là nous sommes d'accord.

Avez-vous eu des difficultés pour envoyer votre message?

E. : Oui

Lidia a pris une mesure au hasard. Il se trouve qu'elle peut la reporter 3 fois dans u . D'autres élèves expliquent qu'ils n'ont pas été compris parce qu'ils n'avaient pas pris de mesure. Ils avaient dessiné "au hasard".

M. : Est ce qu'on peut prendre "le même hasard" ?

E. : Non, moi j'ai pris ma mesure, mais j'ai oublié de l'envoyer.

E. : Je voulais envoyer mon petit carré, mais au téléphone on ne peut pas.

M. : Au téléphone, on peut envoyer une mesure, on ne peut pas envoyer un petit carré.

E. : Par la poste, par lettre.

Isabelle: On peut dire au téléphone, tu découpes un petit carré et tu donnes la mesure.

M. : Avec les mesures, d'accord.

Qui a encore quelque chose à dire? Bon.

En fait, dans leurs messages, les élèves ont en général essayé de décrire leurs constructions géométriques, ce qui n'a pas été facile. Il est probable que les difficultés rencontrées leur ont fait oublier l'importance de la communication des dimensions de la maille.

Fin du compte-rendu.

RECHERCHE DE LA MESURE DU COTE D'UN CARRE D'AIRE 27 : CHRONIQUE RESUMEE(*)
TRANSCRIPTION DE CERTAINES SEQUENCES DE LA SEANCE DU 7/2/78

Existe-t-il un carré d'aire 27 ? Après une longue discussion à ce sujet, les élèves ont cherché à approcher la mesure a du côté d'un tel carré et trouvé que :

$5 < a < 6$

puis $5 + \frac{3}{20} < a < 5 + \frac{1}{5}$, puis $5 + \frac{7}{40} < a < 5 + \frac{1}{5}$

et finalement à la fin de la séance précédente :

$5 + \frac{19}{100} < a < 5 + \frac{1}{5}$

Au cours de la séance dont les extraits suivent, ils vont chercher à approcher mieux a. Comme le fait de réduire toutes les fractions au même dénominateur pour calculer (en l'occurence le millionième) va leur paraître lourd et peu fiable, ils vont chercher une nouvelle écriture pour les nombres qu'ils manipulent et introduire une écriture décimale.

Première Séquence

M - Nous cherchions le côté d'un carré qui avait pour aire 27. Est-ce-que c'était facile ou difficile ?.

E - ça c'était difficile, hein ?.

M - Est-ce qu'on a trouvé ?.

E - Non, on se rapproche quand même.

M - On se rapproche quand même, on se rapproche toujours.

E - Mais il y a toujours un espace entre les deux.

M - Il y a toujours un espace entre les deux. Entre quoi ?

(*) Rédigée par M. Artigue et J. Robinet.

E - Entre l'aire qu'on a trouvé qui se rapproche de 27 et l'aire 27.

M - Et l'aire 27. Bon pour l'instant où en sommes-nous, qu'est-ce que nous avions dit ? Nous avions dit, hein ! Nous savions d'abord les unités entières. Combien il y en a toujours ?

E - 5

M - 5, celles-là on le sait. Maintenant on sait qu'il y a toujours 5 unités entières. On les met de côté et nous nous occupons .... .

E - Du nombre fractionnaire.

M - Nous nous occupons du nombre fractionnaire qui suit 5. Nous savons, nous savions qu'il était plus ... au départ ...

E et M : Plus grand que $\frac{3}{20}$, mais plus petit que $\frac{1}{5}$

M - Alors ça, nous avons fait des propositions et vous aviez proposé, euh, $\frac{7}{40}$. Alors qu'est-ce que nous avons fait chaque fois que vous avez fait une proposition.

E - On a vérifié si, pour voir, pour si, euh, si la valeur qu'on a donné à a, pour voir si ça donnait l'aire. On a vérifié, on a fait la multiplication et après on s'est dit si c'était plus grand ou plus petit pour le placer sur la mesure.

M - On regardait si c'était plus petit ou plus grand pour le placer sur la mesure. Qu'est-ce qu'on faisait alors à ce moment là, qu'est-ce qu'on faisait ? On s'occupait de quoi ? Est-ce qu'on reprenait à partir ...

E - Ah non, on reprenait de $\frac{7}{40}$ à $\frac{1}{5}$.

M - On reprenait de $\frac{7}{40}$ à $\frac{1}{5}$, bon, alors oui.

E - On vérifiait que ça se trouvait bien entre $\frac{3}{20}$ et $\frac{1}{5}$ aussi. Si c'était ... si ça dépassait $\frac{1}{5}$, ça nous arrangeait pas et si ça, si c'était plus petit que $\frac{3}{20}$, ça nous arrangeait pas aussi.

M - Voilà, ça nous arrangeait pas, tu as raison, tu as raison. Alors, nous en étions arrivés maintenant .... Regardez ici. (Elle montre la feuille de papier où sont reportés les nombres sur un segment de droite). Entre $\frac{19}{100}$ et $\frac{1}{5}$, et alors vous aviez dit que $\frac{1}{5}$ on pouvait aussi l'écrire ...

E - $\frac{20}{100}$ (dit 20 centièmes).

M - $\frac{20}{100}$

E - Il y avait $\frac{1}{100}$ de différence

M - Alors il y a pour l'instant $\frac{1}{100}$ de différence. $\frac{1}{100}$. On va encore approcher plus près, alors quelqu'un a proposé $\frac{1}{1000}$ et on s'était arrêté là. Nous proposons pour l'instant $\frac{1}{1000}$. (Silence). C'est vrai, alors dites-moi on a essayé de le placer le millième entre le centième, ici, dans le centième, (elle montre le segment de longueur $\frac{1}{100}$). Combien y avait-il de millièmes ?.

E - 10

M - Il y en avait 10, alors on a donc pris un millième ici. Maintenant, vous avez $5 + \frac{19}{100} + \frac{1}{1000}$ - Nous allons essayer pour voir ce que ça donne, hein ! Vous essayez, vous travaillez seul. On va voir si c'est plus grand, si c'est trop grand ou trop petit, d'accord ? Vous mettez nom et date. Qui n'a pas compris ce qu'il fallait faire ? Qui voudrait le répéter ce que nous allons faire maintenant ? Noëlle veut le répéter ?

E - Alors tu nous donnes une feuille ...

M - Oui.

E - Et on doit vérifier si $5 + \frac{19}{100} + \frac{1}{1000}$ est plus grand ou plus petit.

M - que ... enfin que ... un carré de côté $5 + \frac{19}{100} + \frac{1}{1000}$ a une aire plus grande ou plus petite que ... .

E - d'un centième.

M - Non, que ... Combien c'est l'aire ?.

E - que 27.

M - que 27. Voilà, vous avez bien compris ? Allons-y. Vous mettez le nom, la date - Vendredi. Vous aviez expliqué puisque (choses confuses), maintenant vous ne prenez plus comme Isabelle nous l'avait très bien expliqué. On est à $\frac{19}{100}$, pourquoi vous prenez maintenant des millièmes ?.

E - Brouhaha confus.

M - Pourquoi vous prenez des millièmes ?

E - C'est plus petit qu'un centième.

M - C'est plus petit qu'un centième.

E - Si on prenait plus grand qu'un centième, ça ferait plus grand que l'aire 27.

M - Oui, d'accord !.

E - C'est sûr que ... E - ça peut pas être plus grand que $\frac{10}{1000}$, $\frac{9}{1000}$. Dix millièmes c'est un centième.

M - Ah oui, d'accord !.

E - Il vaut mieux prendre 9 millièmes.

M - 9 millièmes. Prends les 9 millièmes. Prends les, si tu veux prends les, on verra bien, prends les. Toi tu prendras 9 millièmes au lieu de prendre un millième, hein !.

E - 5,6 plutôt que 1.

M - Toi tu préfères 5,6 que 1. Bon Bé, écoute, pourquoi prendre des millièmes, expliquez moi ! Essayez de m'expliquer pourquoi vous avez pris des millièmes, là vous venez de prendre des centièmes. Pourquoi vous prenez des millièmes ?.

E - Parce que c'est qu'on y était presque arrivés avec $5 + \frac{19}{100}$ et comme on voulait pas que ça dépasse et comme un millième c'est tout petit, on a voulu prendre des millièmes, comme ça on était sûrs que ça dépasse pas 27.

M - Oui et on avait des centièmes, pourquoi vous avez ...

E - On aurait pu prendre une unité plus petite que les centièmes et plus grande que les millièmes, aussi.

M - Ah, d'accord.

E - On aurait pu essayer ...

M - On verra d'accord, plus petit. Qu'est-ce que tu aurais pu prendre ? Une plus petite que les millièmes et plus grande que les centièmes, non plus petite que les centièmes, d'accord. On verra, allez-y. Toi puisque tu proposes $\frac{9}{1000}$. Tu le ... Tu le prends, tu fais avec 9 millièmes, ce sera fait. Et toi tu proposes 5 ou 6 millièmes, tu le fais avec 5 ou 6, on verra bien, hein !.

E - Je me demande où on va aboutir.

M - Oh ben, je me demande où on va aboutir, allons y.
(Le film l'interrompt pendant le travail individuel d'une durée de quinze minutes).

M - Un millionième, ben dis donc, on va être riches.
Long brouhaha incompréhensible de la part des enfants (un enfant prépare le tableau de la multiplication).

M - Ah, Ah ! Bon, nous y allons, ça y est tu as fini, est-ce que tu trouves, alors écrit. Alors nous sommes toujours à $\frac{1}{5}$, dis plus petit que $\frac{1}{5}$. Alors là, à ton avis ? Et combien trouves-tu ?.

E - Je trouve 910381 millionième.

M - Millionième, oh la la la la. Bon vous regardez tous au tableau.
Qui a eu des difficultés ?.

E - Moi.

M - Qui a des difficultés, qui a des difficultés ?.

E - J'en ai un peu parce que quand pour faire la multiplication c'est quand même facile, mais c'est quand il faut tout ajouter !.

M - Bon, ah ! Quand il faut tout ajouter ... Ah, j'écoute ta ...

E - On prend le plus grand nombre c'est un millionième.

M - Un millionième, le plus grand nombre un millionième.

E - Et pis quand y a les millionièmes, il faut essayer de trouver, il faut faire des millionièmes, alors faut faire ... et puis quand il y a des dixièmes il faut faire des millionièmes. Parce que le million c'est ... il faut tout transformer en millions.

M - Il faut tout transformer en millionièmes, bon. Elle transforme tout en millionième et combien il y a de zéros pour le millionième ?.

E - 6 zéros.

M - 6 zéros. Bon alors ?.

E - Dans ce truc (sous réserve d'interprétation) le plus grand c'est le centième.

M - C'est le centième et pourquoi ?.

E - Parce qu'il faut multiplier beaucoup pour avoir ... .

M - Et par combien il faut multiplier ?.

E - 10.000.

M - Ben 10.000 eh bien alors multiplier par 10.000. Bon.

E - J'ai commencé par le 9. Et pris après les dixièmes ... .

M - Qui a eu des difficultés ? Alors Cocotte ?.

E - Moi, parce que c'était pour rajouter tout, il y avait beaucoup de zéros et je m'embrouillais avec tous ces zéros.

M - Tu t'embrouillais avec les zéros, toi ! Explique-nous pourquoi.

E - C'est pour faire la même unité commune.

M - C'est pour faire la même unité commune.

E - On peut pas ajouter.

M - On peut pas ajouter, ça c'est d'accord.

E - Si notre tableau était, si notre tableau euh ... , si notre opération était assez grande pour mettre tous les zéros ; je pense que ça sera quand même un peu plus clair, parce que, là ! (Brouhaha).

M - Ecoute, qui t'empêche de faire, de les faire plus grandes ? Qui c'est qui t'empêche de les faire plus grandes, alors ?.

Après ceci, se place une discussion sur la différence entre un million et un millionième, une élève faisant remarquer :

- "Maîtresse, quand, Olivia elle a dit un millionième, c'est le plus grand, c'est pas vrai, c'est le plus petit."

Bastien clôt cette discussion en disant :

- "Il y a quand même une différence entre un millionième et un million, puisque un millionième, tu partages ta tarte en un million - Pour un million, tu as un million de tartes - C'est pas pareil !".

Ensuite la maîtresse fait refaire au tableau la multiplication :

$$(5 + \frac{19}{100} + \frac{1}{1000}) \times (5 + \frac{19}{100} + \frac{1}{1000})$$

La disposition utilisée est la suivante :

5	$\frac{19}{100}$	$\frac{1}{1000}$	
25	$\frac{95}{100}$	$\frac{5}{1000}$	5
$\frac{95}{100}$	$\frac{361}{10\ 000}$	$\frac{19}{100\ 000}$	$\frac{19}{100}$
$\frac{5}{1000}$	$\frac{19}{100\ 000}$	$\frac{1}{1\ 000\ 000}$	$\frac{1}{1000}$

Plusieurs élève, à tour de rôle, passent au tableau pour remplir cette grille. Lorsque c'est terminé, il leur faut additionner les résultats partiels. Ils additionnent d'abord entre eux ceux qui ont le même dénominateur. Pour les autres il faut faire une unité commune - Tous les nombres sauf 26 sont transformés en millionième - Cela ne va pas sans mal - Puis on additionne les millionièmes en posant l'addition en colonne. Le calcul terminé, ..

Deuxième Séquence
On cherche une écriture simplifiée

Grégoire - Alors moi je vais commencer par prendre les centièmes et je vais déjà enlever tout le nombre là (il montre) je vais prendre les centièmes après ... (l'enfant écrit 100).

M - Centièmes, là tu a mis 100, 100, un centième mets-le, dis donc centième tu sais l'écrire !.

Grégoire - ça veut dire les centièmes (fin de phrase couverte par la voix de la maîtresse).

M - Un centième ! ça c'est 100, c'est pas des centièmes, ça c'est 100. (L'enfant écrit $\frac{1}{}$ au dessus de 100).

Grégoire - Un centième parce que là je voulais mettre d'une façon, là dessous je voulais mettre les millièmes (il montre l'aplomb du premier zéro).

M - Bon; d'accord bon.

Grégoire - A côté parce que je sais que les centièmes et les millièmes, c'est ... (L'enfant n'a plus de place pour écrire).

M - Bon, on va effacer, tu commences dans un coin, attends, monte là-dessus.

M - Alors ce sont des centièmes. (L'enfant réécrit 100).

M - ça c'est 100, si vous n'êtes pas d'accord vous le direz - Ecoutez bien, il explique d'abord après on va voir, on va discuter.

Grégoire - Après les millièmes, quand j'aurai tout, quand j'aurai ... je mettrai à côté en mettant les nombres (il écrit 100).
1000
Je mettrai pareil sauf que je verrai combien il y a de millièmes, combien il y a de centièmes et après je ferai mon opération.

M - Je ne comprends pas, moi. Vous comprenez vous autres ? Fais-le parce que tes petits camarades ne comprennent pas. Et .. Explique, allez !
(L'enfant écrit 100 Pendant ce temps là, la maîtresse commente).
1000
10000

M - 100 tu fais des 100, centièmes ... Bon vas-y, écris, écris, pour l'instant tu nous écris 100, 1000, 10 000, allez finis. Vous regardez ce qu'il fait, si vous ne comprenez pas ce qu'il fait vous le dites.

Régine - Vous le laissez finir d'abord.

M - Vous le laissez finir et il expliquera, si vous n'êtes pas d'accord, vous le direz après.

Grégoire - 100 000

M - Après 100 000, 100 000, allez dépêche toi, vite ! 100 000. Réveillez vous un peu dans ce coin là là-bas, après ... .

Grégoire - Les millionièmes.(il écrit 1000 000).

M - Les millionièmes, bon. Olivia se réveille !.
Long silence

M - Laissez-le, laissez-le, après ?.

M - Bon, alors qu'est-ce que tu ... Attends de passer !.

Grégoire - Après je compte de, et après combien il y a de ... (il montre le 100).
190, ça fait 90.

M - 90, bon tu veux écrire 90, tu veux écrire en face, tu veux écrire là en face.

Grégoire - C'est 90 centièmes.

M - 90, comme ça !.

Grégoire - Oui oui 90 et je sais que c'est des centièmes parce que je voulais mettre après ... (la maîtresse écrit sous sa dictée 100 90)
1000 10

il n'est pas d'accord, elle lui rend la craie et il va écrire

100	90
1000	10
10000	361
100000	38
1000000	1

M - D'accord après.

Grégoire - C'est 10.

M - 10 bien.

Grégoire - Mais pas comme ça parce que ... .

M - Bon bé, écris le.
90 tu veux l'écrire comme ça, bon vous en discuterez tout à l'heure, après, après ... 361 vite écris le là, n'écris pas à cheval, ne mets pas deux heures oui oui d'un côté ou de l'autre.

M - Parce que à cheval on n'y voit rien.

Régine - Oui d'accord.

M - Là 90, allez vas y, 361 après, 38 après 1. Seulement tu ne les as pas mis en face.

Régine - Non non ça ne fait rien.
(L'enfant fait l'addition).

M - Bon est-ce qu'on trouve pareil, et alors c'était quoi ce que vous aviez ?.

E - - Oui c'est bien ! Oui il a toujours décalé .... Il a mis tous les centièmes, les millièmes .... Ensuite il a, il a rajouté, comme ça ça nous évite .... C'est bien, hein ! C'est vraiment plus rapide ! c'est bien !.

M - Qu'est-ce qu'il a fait alors ? Ecoutez bien.

Grégoire - J'ai commencé les 90 centièmes.

M - Bon.

Grégoire - Après j'ai mis les 10 millièmes, après j'ai su qu'il y avait 361 .....

M - Oui.

Grégoire - dix-millièmes.

M - dix-millièmes.

Grégoire - 3 millièmes, alors je les ai mis là.

M - 3 millièmes, pourquoi ? Oui ?.

Grégoire - (Il bafouille).

M - Pourquoi tu a décalé comme ça ?

Grégoire - Parce qu'autrement je vais pas les ajouter les, les .... Là c'est des millièmes.

M - Tu commences par le premier. Qu'est-ce que c'est ça alors ? (elle montre 9).

Grégoire - ça c'est des centièmes.

M - C'est des centièmes, çà c'est des centièmes ? ça ?

Classe : Non, non !.

Grégoire - (Silence puis) Y a 9 ... .

Régine - 90 c'est des centièmes.

M - C'est quoi, 90 c'est des centièmes et 9 il cherche ce que c'est.

Grégoire - Ben, ça doit être des dixièmes.

M - Ah ça peut être des dixièmes. Ah bon, 9 ça peut-être ...

Grégoire - Des dixièmes, après là, c'est des millièmes, après c'est les dix-millièmes. Le zéro, ça doit être des (centièmes) est couvert par la voix de la maîtresse.

M - Alors le zéro c'est des centièmes hein ! Je vais l'écrire au-dessus $\frac{1}{100}$, j'écris comme ça, on le saura (elle écrit $\frac{1}{100}$ au dessus de la colonne des centièmes). çà tu nous as dit que c'était des dixièmes, alors ici qu'est-ce que tu nous as dit que c'était des millièmes, ici des dix-millièmes, et là les cent-millièmes et là les millionièmes. (Elle écrit chaque fraction au-dessus des colonnes du tableau fait par l'enfant). Bon alors, les autres, qu'est-ce que vous en pensez ?.Il réexplique, il réexplique pour ceux qui ... Qui n'a pas compris ? Qui n'a pas compris, est-ce que quelqu'un n'a pas compris ?.

Louison - Je crois que ça n'est pas tellement la peine ... . Si peut-être !.

M - ça sert ça ?.

Louison - Si ça sert je crois. Gros brouhaha dans la classe.

- Là on voit comment il faut ajouter ... .

M - Alors là on voit comment il faut ajouter parce que tu a mis 10 alors 100, alors c'est des centaines, c'est 100 aussi, là tu l'as bien mis dessous ... Bon tu peux le laisser. Dites qu'est-ce que vous en pensez ? Tu te mets debout Gégène, tu y verras plus clair. Qu'est ce que vous en pensez ? Qu'est-ce que tu penses toi, Laurent ?

Louison - Moi je pense que c'est très bien, parce que ça nous fait aller beaucoup plus vite que de faire tout transformer en millionièmes et puis.

M - Il a pas fait, ça évite de faire si long :

Louison - Il a pas fait ... Il a pas marqué les centièmes car il savait que c'était 90 centièmes, alors c'était pas ... on n'était pas obligé de rajouter tout, tout, tout ce que tu as mis tout en haut, des millièmes, des dix ... .

M - Pourquoi on n'était pas obligé de les ajouter ?.

Louison - Parce que, là, il y a marqué ... .

M - Il a ajouté, il a tout ajouté !.

Louison - Oui mais il n'a pas marqué 90 centièmes. Il a su que c'était des centièmes, des millièmes, des dix-millièmes, il a pris que ceux du haut et il a rajouté tout ça et il savait bien que tout ça c'était des millionièmes.

M - Ah voilà, tout ça il savait qu'à la fin tout ça c'était des millionièmes, il en a mis qu'un, il en a mis un et c'était tout des millionièmes, hein !.

Louison - Moi aussi, je peux dire que ça c'est des 9 dixièmes.

M - Ah bon, il peut dire, regardez bien ce qu'il peut dire, regardez bien ce qu'il peut dire ! Ah bon, attends peut-être. Qu'est-ce qu'il peut dire ? Qu'est-ce qu'il veut dire ? Qu'est-ce qu'il veut dire ? Peut-être quelqu'un va nous dire ce qu'il peut dire ? Qui va nous le dire ? Qu'est-ce que c'est que ça ?.

Louison - Des dixièmes.

M - Des 9 ... E. dixièmes.

M - des 9 dixièmes, et de ça qu'est-ce qui pourra dire ce que c'est ?

Louison - Des 4 centièmes.

M - Des 4 centièmes, des 4 centièmes et ça qu'est-ce qui pourra dire ce que c'est, qu'est-ce qui pourra dire ce que c'est, qu'est-ce que c'est ?.

Louison - Des six millièmes.

M - Des 6 millièmes, et là, qu'est-ce qui pourra dire ! Monsieur Jacques.

Louison - Des 4 dix millièmes.

M - 4 dix-millièmes et 8 qui est-ce qui pourra dire ce que c'est, Gégène.

Louison - 8 cent millièmes.

M - 8 cent millièmes !.

Louison - C'est une chaîne.

M - Une échelle ?.

Régine - Non une chaîne !.

M - Une chaîne pardon.

Louison - 1 millionième.

M - 1 millionième. Bon alors comment on pourrait encore l'écrire ? Nous avons nos entiers, hein, on en a 26 d'entiers ... .

Louison - Ben les 26 comme ce sont des entiers, on sait l'écrire, mais ce sont les fractions !.

M - Oui, mais maintenant comment je vais écrire tout ça ? Il va bien falloir que je trouve quelque chose. Je sais que 9 ce sont des dixièmes, que 4 ce sont des centièmes et comment je vais écrire maintenant que j'ai 26 entiers et puis encore 946 481 millionièmes. Est-ce que vous avez une petite idée ? Non Bastien tu ne l'as plus, L'autre jour tu l'avais, aujourdh'ui tu n'en as plus, aujourd'hui il rêve. Qui, comment ?

E - Maîtresse, là on a ... on a ... .

M - Une écriture je veux maintenant, je veux autre chose hein ! (Silence) Comment je peux, pour bien montrer que là, j'ai une partie qui est entière qui est 26 et que le reste évidemment ce sont mes dixièmes, mes centièmes, mes millièmes etc ... . Si je les mets ... Je le laisse comme ça, comment je saurai que 9 si je le mets tout à côté, y a rien qui peut nous séparer ? euh ! Qui peut ?.

Régine - Qu'est-ce qui veut écrire de toutes façons le résultat ?

M - Qui veut écrire maintenant ?.

R - Qui veut écrire ?

M - Et le résultat combien cela nous fait-il ? Qu'est-ce que nous avons ? On ne vous pas a dit de faire l'opération, on vous dit d'écrire le résultat.

A ce moment, on distribue des feuilles à chaque enfant et chacun cherche une écriture de son côté. Cette période de recherche individuelle dure une dizaine de minutes. Elle n'est pas filmée. Le film reprend, lorsque l'enfant qui avait écrit les nombres décalés, Grégoire, vient présenter son écriture :

E d
26 | 9. 1. 36. 1. 38. 1

Les autres essaient de comprendre cette écriture et de l'expliquer.
-"Moi, je pense que E c'est pour entiers".
-"peut-être, puisque après les entiers, il y a les dixièmes, les centièmes, les millièmes, les dix millièmes, les cent millièmes, les millionièmes."
-"Maîtresse, je crois qu'il s'est servi des nombres du résultat qu'on a marqués là (elle montre le tableau et le calcul de la multiplication).

Grégoire veut s'expliquer mais la maîtresse l'interrompt pour passer à une autre proposition, celle de Frédérique :

26u | 946 M | 481 C

Le "c" intrigue les enfants. Pourquoi l'a-t-elle mis ? que signifie-t-il ? : centaines ? centièmes ? centièmes de quoi ?.

La maîtresse les aide et finalement les "481" sont interprêts comme "481 millionièmes".

On passe ensuite à l'écriture d'Olivia :

26 ; 9, 4, 6, 4, 8, 1.

Le point virgule séduit les enfants :

"On met un point virgule, ça veut dire qu'elle est pas encore finie la phrase ; là, ça veut dire pareil, que le nombre est pas encore fini".

Puis la maîtresse demande :

Troisième séquence

M - Qu'est-ce-qué vous en pensez, qu'est-ce-que vous en pensez de cette écriture, qu'est-ce que vous en pensez ?.

E - C'est bien.

Beaucoup lèvent le doigt.

M - Mathieu, tu n'en penses rien ? Qu'est-ce-que tu en penses ?

E - C'est bien.

M - C'est bien. On la garde comme ça.

E - Oui.

E - Il faudra faire attention aux virgules, hein !

M - Bon, oui, il faudra peut-être l'améliorer, on va voir, bon déjà c'est pas mal.

E - Aussi, il faudra dire aussi que dès qu'on rapetisse un peu notre point virgule, aussi il faudra dire que hop, on divise encore par dix, puisque après les dixièmes, après c'est les centièmes et comme c'est dix fois plus grand les dixièmes alors dès qu'on rapetisse la virgule, il faudrait dire que, hop on divise par dix.

M - Par dix, bon, alors dès qu'on parle des dixièmes, on sait qu'on divisera par dix, tout le temps, chaque fois qu'on mettra une virgule.

E - Chaque fois qu'on la rapetissera.

M - Chaque fois qu'on rapetissera la virgule, ce sera divisé par dix, d'accord. Dis donc, ça va être un peu compliqué de se rappeler tout ça. On verra. Peut-être qu'on trouvera un système plus facile encore. Bon qui a une autre proposition ? Qu'est-ce que tu as à proposer ? Qu'est-ce que tu as fait, toi ?

(Elle s'adresse à Jean-Baptiste et va écrire sous sa dictée au tableau - Voici l'écriture proposée par Jean-Baptiste :

	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10\ 000}$	$\frac{1}{100\ 000}$	$\frac{1}{1\ 000\ 000}$
26	9	4	6	4	8	1

E - J'ai mis 26.

M - Ah, bon, Jean-Baptiste il a mis 26

E - J'ai tiré. J'ai tiré un trait, comme ça (geste). J'ai tiré un autre trait, encore un autre trait, encore un autre trait.

Plusieurs élèves - Ah, oui !.

M - Oui.

E - Alors, après, j'ai marqué 9, 4, 6, 4, 8 et 1 et en haut j'ai marqué un dixième, après j'ai marqué un centième, un millième, un dix-millième, un cent-millième et un millionième.

(Valérie annonce tout bas le cent-millième avant lui).

M - Voilà. Bon alors, bon, qui a compris ? Qui comprend là ? Tu ne comprends pas, toi, Marc, oui ou non ?

E - Non.

M - Non, alors viens ici. Tu vas lui expliquer (elle s'adresse à Jean-Baptiste). Explique le lui parce que Monsieur Marc ne comprend pas.

E - C'est clair pourtant.

M - Ah ! c'est clair pourtant ! seulement il n'a pas ses lunettes. Tu vois, il les a pas mises. Tu vois, va les mettre, tu vas comprendre tout de suite - Dépêche-toi ! Où sont tes lunettes ?

E(tout bas) - A la maison.

M - A la maison ! ça ne m'étonne pas que tu ne comprennes pas. Allez ..

(J.B) E - ça, ça veut dire que j'ai 9 dixièmes (il montre la colonne des dixièmes).

M - Ah ! déjà et ça ! (elle montre la colonne des entiers).

(J.B)E - ça, ça veut dire 26 entiers.

M - Est-ce que tu comprends ça ? (pour Marc).

(J.B)E - Et ça, ça veut dire que c'est des dixièmes, la colonne dixièmes.

M - La colonne des dixièmes.

E - Là, j'en ai 9 dixièmes, là c'est la colonne des centièmes, la colonne des centièmes.

M - Voilà.

E - J'en ai 4.

M - Est-ce que tu comprends ? Ne me regarde pas moi, regarde

E - Et là, c'est la colonne des millièmes, j'en ai 6 millièmes là, c'est la colonne des dix-millièmes, j'en ai 4 dix-millièmes et là, c'est la colonne des cent-millièmes, j'en ai 8 et ça c'est la colonne des un millioniëmes, j'en ai 1.

M - Est-ce que tu as compris maintenant.

Suit une discussion sur le thème :

- Ces écritures sont elles pareilles ou non ?

Celle de Frédérique est rejeté par certains :

"Elle est pas pareille", "elle veut dire la même chose mais elle est pas pareille", "elle montre pas les dixièmes, les centièmes". Les aires sont partagés. La maîtresse demande ensuite à Florence de présenter son écriture :

26, 946 481

Quatrième Séquence

M - D'accord, qui a une autre écriture ?.

Florence lève le doigt.

M - Toi, bon. Vas y.

Florence dicte son écriture : 26, 946 481).

E - J'ai mis 26.

M - Oui.

E - Une virgule, et puis j'ai mis le résultat le 9, 4, 6, 4, 8 et 1.

M - Bon, alors.

(J.B) E - Il y en a.

M - hein !

(J.B) E - Il y en a un peu pareille (il montre du doigt).

M - Y en a une un peu pareille que celle-là ! Ah, bon, laquelle ?.

(G)E - Ah, non, elle est pas pareille, parce que ...

E - Celle-là, mais simplement elle a marqué une virgule pour bien dire que c'étaient les dixièmes qui étaient plus grands que les centièmes et que les centièmes étaient plus grands (écriture d'Olivia).

M - D'accord et celle-là ? (elle montre l'écriture de Florence).

E - Ah ! on ne sait pas ce que c'est ça.

M - Ah, on ne sait pas ce que c'est ça.

(F)E - (Florence explique son écriture) :
Là c'est les unités, là 26 unités.

M - 26 unités, après.

E - Après, là, les dixièmes, après là les centièmes, les millièmes, les dix-millièmes.

M - Ah, bien - il va falloir qu'on se le dise.

(F) E - Après les entiers, on avait toujours dit qu'y avait les dixièmes.

M - Ah, après les entiers, et bien, regardez, toujours les dixièmes. Bon, on le saura. Après

E - Après les centièmes

(G) E - C'est parce que c'est les nombres décimaux.

M - Ah, c'étaient les nombres décimaux.

( ) E - Sinon après, il y a des demis, des quarts.

M - Comment ?.

E - Si c'est pas des nombres décimaux.

M - Ah, Ah oui d'accord, ça c'est la chaîne des dix.

E - Oui.

M - Bon, d'accord, bon, bon.

E - Il y a beaucoup de chaînes.

M - Il y a beaucoup de chaînes, il y a la chaîne des 2 oui ...

(B) E - Aussi de toute manière ...

M - La chaîne des 3. Mais là, c'est la chaîne des 10, alors la chaîne des 10, alors la chaîne des 10, on dit les décimaux d'accord, décimaux dans la chaîne des 10 et alors, qu'est ce qu'on sait, que dans la chaîne des 10 ... que toute ... que celui, le premier là, qui est tout à côté des entiers c'est.

E - C'est les dixièmes.

M - Les dixièmes.

E - Et on sait que.

E - Les centièmes, plus on va vers la droite.

M - Que plus on va vers la droite.

E - Plus le nombre.

M - Plus le nombre.

E - Sera plus petit.

M - Sera plus petit que dix.

E - On partage en dix.

M - Très bien. Alors maintenant est-ce que vous saurez ?

R - Il y a encore d'autres écritures.

C'est alors le tour de Valérie et Hélène.

Ecriture de Valérie : 26 | x 10 > 946 481 < :10

Ecriture d'hélène : 26 | 946 421 → 10 x c.

Valérie s'explique :

"Par là, j'ai mis fois 10, parce que plus on va par là, plus on se rapproche des unités et plus c'est plus grand parce qu'on multiplie et par là (elle montre la droite) plus on va par là, plus on va vers les fractionnaires, plus on va .. petit."
"Et aussi, j'ai mis divisé."

Hélène, elle dit :
"Moi c'était pareil."

M - "Tu n'as pas mis ça x 10 !."

-"Oui mais c'était à peu près pareil."

puis elle dit :

-"J'avais fait une flèche aussi et j'avais dit : si on met encore des chiffres par là, c'est dix fois plus petit."

Les enfants trouvent que ces écritures sont exactement pareilles.

Cinquième Séquence

E - Aussi, ces deux écritures, elles sont exactement pareilles, parce que, celle-là, on a mis un trait, mais là on aurait pu mettre un petit rond et là un petit carré, on aurait pu mettre tout ce qu'on veut, mais.

M - Voilà, on peut mettre un signe.

(V) E - On peut remplacer beaucoup de choses par des signes.

M - Mais bien sûr, seulement ... bien sûr, c'est une convention.

E - On aurait même pu entourer les unités et puis laisser les dixièmes.

M - Bien sûr, on aurait pu entourer les unités et écrire la suite après, on sait que 9, le premier chiffre sera toujours les dixièmes, les centièmes, les millièmes, etc ... toujours. C'est une convention. Et pour les écrire ces nombres là, la convention, celle dont tout le monde se sert, c'est la virgule, ces écritures sont toutes justes.

R - C'est celle dont on se sert en France, parce que les anglais mettent un point.

M - Oui.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,

Vous pouvez soit :

Consulter notre site WEB

http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html

Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques
Une réalisation dans tout le cursus primaire (1984)

AUTEUR :

DOUADY Régine

Editeur : IREM
Université PARIS VII
Directeur responsable de la publication R. CORI
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Octobre 1984
ISBN : 2-86612-053-1

Chapitre IV
Etude diachronique

Introduction.

Pour exposer systématiquement et évaluer les résultats globaux de notre enseignement, après le CP [cf.Chap.III C], nous allons présenter d'une part certaines productions d'élèves de la classe (évaluations globales, ponctuelles et successives), d'autre part certaines évolutions personnelles diachroniques (évolution individuelle). Pour cela, nous avons encore retenu soit des travaux faits en classe en cours de situation, soit des réponses à des tests issus de la situation ou décontextualisés.

Les deux premières parties du chapitre sont consacrées à la présentation de chacune des épreuves retenues (d'avril 1977 à Juin 1980) avec à chaque fois une analyse apriori de la tâche (plus ou moins brève) et des raisons de son choix, une brève analyse des procédures et des performances des élèves, et le cas échéant un premier éclairage sur les conceptions à l'oeuvre dans l'épreuve concernée. En fait nous y avons ajouté l'étude de travaux de deux groupes, un CM2 et une 6ème, ayant passé certaines épreuves communes avec nos élèves. Ces parties permettent de faire le point sur les apprentissages des enfants. On peut en particulier constater que sur 18 élèves, 2 échouent à l'ensemble des tâches autres que de petite technique opératoire, 12 sont très performants.

La troisième partie concerne la reprise cas par cas de 18 trajectoires individuelles. Cela nous permet avec l'évolution des strictes performances, d'une part de distinguer différentes évolutions parmi nos élèves, d'autre part, plus précisément, de repérer différentes conceptions privilégiées chez certains.

Cette diversité, loin d'infirmer nos théories, témoigne au contraire de leur possibilité d'intégrer les différences, les cas extrêmes balisant en quelque sorte les bornes du champ de validité.

La conclusion du chapitre est consacrée à la confrontation de certaines de nos hypothèses avec les résultats de l'enseignement effectif construit grâce à elles, à savoir

- hypothèse cognitive : s'il existe un "jeu" de cadres avec déséquilibre et rééquilibration par l'élève, il y a apprentissage.

- hypothèse didactique : on peut trouver des situations "adéquates", c'est à dire des problèmes suscitant des jeux de cadres avec imperfection dans les correspondances entre cadres ; et on en a construites.

Résultat : pour une majorité d'élèves, les acquisitions conceptuelles, malgré leur imbrication avec les acquisitions techniques, les précèdent de façon plus ou moins marquée selon les élèves (cf.diagramme diachronique).

Toutefois, si nous vérifions par l'apprentissage global constaté l'exactitude de nos hypothèses, les diversités que nous avons mises à jour montrent aussi qu'il faut faire très attention à ne pas uniformiser la lecture des trajectoires et les conclusions qu'on en tire, quant à l'évaluation des acquisitions individuelles.

. Listes des élèves que nous suivons.
20 élèves

Bastien	Grégoire	Laurent	Olivia
Camilo	Hélène	Lidia	Sandrine
Elsa	Isabelle	Louison	Valérie
Frédérique	Jacques	Marc	Virginie
Gilles	Kamel	Mathieu	Yannick

Remarque : Grégoire et Louison partent en fin de CM1. Louison entre en 6ème Isabelle part pour l'année scolaire 79-80 en Afrique et revient fin Juin 80.

A. Présentation des épreuves et évaluations globales et ponctuelles en 1977 et 1978.

Introduction.

Nous avons déjà présenté une évaluation des élèves à la fin du CP (et au début du CE1) [cf. Chapitre III C] et une évaluation sur le premier trimestre de CE1 [Cf. Chapitre II. 3].

Nous retenons pour la période allant du 2ème trimestre du CE1 à la fin du CE2, un groupe de 20 élèves.

. Les épreuves des 30/4/77, 22/9 et 3/11/77 sont détachées des contextes des situations étudiées en classe et ont pour but de tester certains acquis présumés.

. Les travaux que nous analysons ensuite : 25-28/11, 2/12, 5/12, 8/12, 13/12/77, 16/1, 19/1, 20-23/1/78 sont au contraire dans le champ d'étude de la situation "Rectangles" librement produits par les élèves au cours de leurs recherches. A ces travaux s'ajoutent, les 5/12 et 23/1, des réponses à des questionnaires systématiques jouant le rôle d'exercices d'application.

. L'épreuve du 13/3/78 est à nouveau en relation avec la situation d'apprentissage vécue peu avant : l'agrandissement de puzzles. Il s'agit d'exercices d'application.

. L'épreuve du 22/5/78 teste la technique opératoire en elle même, et aussi comme outil pour exprimer les conceptions sur la division.

. Enfin, l'année scolaire se clôture par des entretiens individuels portant sur 2 problèmes que nous analysons.
Les travaux d'enfants, en annexe, fournissent les textes des épreuves.

1. *Epreuve du 30/4/77 (19 élèves, absente Valérie).*

1.1. Cette épreuve témoigne du choix de l'enseignant de mettre en relation le cadre algébrique et le cadre numérique. Par ailleurs, la division euclidienne est une des voies d'accès de l'apprentissage des nombres décimaux.

Dans la tâche proposée ici aux élèves, l'outil sollicité est la division euclidienne formulée dans un langage algébrique et sous forme d'opération.

1ère question.

y étant donné,

a) trouver x et r tels que $y = (3 \times x) + r$ $r < 3$

b) trouver x et r tels que $y = (4 \times x) + r$ $r < 4$

2ème question.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline ? & ? \end{array}$$

ces opérations comprennent d'une part la traduction des questions 1 a) et 1b), d'autre part des opérations autres.

Nombre de questions : en 1 a) 9, en 1 b) 12, en 2) 32

1.2. Résultats : nous ne pouvons que recenser les performances en repérant le nombre n d'erreurs.

n = o	n = 1 ou 2	n = 3 ou 4
13 élèves	Gilles Jacques en 1b) Laurent Virginie en 2	Lidia en 1b Mathieu en 2

2. *Epreuve du 22/9/77 (18 élèves, absents : Marc - Sandrine).*

2.1. Cette épreuve, proposée à la rentrée des classes, comporte 5 parties destinées à tester les acquis et repérer les oublis vis à vis des derniers apprentissages du CE1 d'une part, vis à vis des connaissances sur lesquelles on veut s'appuyer dans les nouvelles situations d'autre part. En fait, cela ne concerne que le cadre algébrique et le cadre numérique.

2.2. Les tâches et les résultats.

Dans la première question, il s'agit d'effectuer 7 soustractions de complexité croissante :

6 ont des retenues

. Résultats : nous recensons le nombre n d'opérations justes.

n = 7 justes		n = 6 justes	n = 4 ou 5 justes
Bastien	Kamel	Camilo	Frédérique
Elsa	Laurent	Gilles	Jacques
Grégoire	Louison	Mathieu	Lidia
Hélène	Olivia	Valérie	
Isabelle	Yannick	Virginie	

Dans la 2ème question: connaissant x, on veut calculer $y = 2x + 5$.
Il y a 5 questions correspondant à 5 valeurs croissantes de x. La dernière $x = 2093$ est source d'erreur pour plusieurs élèves. Nous repérons le nombre n de calculs justes.

n = 5 justes	n = 4 justes		n = 2 ou 3 justes	
Bastien	Camilo	Laurent	Elsa	Lidia
Grégoire	Frédérique	Louison	Gilles	Mathieu
Olivia	Kamel	Valérie	Jacques	Yannick
	Hélène	Virginie		
	Isabelle			

Il s'agit dans la 3ème question de multiplier des nombres petits présentés sous forme d'un tableau.
Les réponses sont pratiquement toutes correctes. Laurent commet 2 erreurs et Jacques ne répond pas à toutes les questions.

Les 2 dernières questions concernent la division présentée sous forme algébrique.
Connaissant y, trouver x et b tels que $y = 2x + b \quad b < 2$
trouver x tel que $y = 2 \times x$.

Mathieu, pour $y = 2x + b$, n'a pas retenu que b devait être inférieur à 2.
Lidia commet quelques erreurs.
Hormis ces deux cas, tous les autres (16 élèves) fournissent des réponses correctes.

2.3. Bilan : les deux premières questions sont les moins bien réussies. Mais ce sont les moins familières pour les élèves et c'est pratiquement la rentrée des classes. En revanche, il y a permanence des acquis pour la pratique

de la formulation algébrique et pour la division euclidienne, (dans une situation simple toutefois).

3. *Epreuve du 3/11/77 (19 élèves, absent Jacques).*

Cette épreuve présente différentes formulations de relations numériques.

Trois questions sont exprimées dans un langage algébrique. Dans ce cadre, elles sont de difficultés différentes.

a) $y = 4 \times x$ la donnée est tantôt x, tantôt y
Résultats : les réponses sont toutes correctes pour tous.

b) $y = 4x - 6$ la donnée est de même que précédemment, tantôt x, tantôt y
Résultats : dans ce dernier cas, plusieurs réponses correspondraient à $y = 4x + 6$ en ce sens que la procédure semble être : on enlève 6 à la valeur fournie et on divise par 4

Nous comptons les erreurs :
$n \leqslant 2$ 15 élèves
$n > 2$ Gilles, Isabelle, Lidia, Sandrine

c) $y = (4 \times x)+r \quad r < 4$, y donnée, calculer x et r
Résultats : tous sauf Lidia répondent correctement.

. Deux questions sont plutôt numériques dont une avec un habillage concret. Tous réussissent sauf Lidia.
. La dernière question se présente sous forme d'un petit problème traditionnel, accompagné d'une liste incomplète de nombres en correspondance donnant la relation : 1 repas $\longmapsto$ 7F, dont on se sert dans le problème. Par ailleurs cette information est fournie dans l'énoncé du problème.

Tous sauf Lidia complètent correctement la liste, mais seulement 9 sur 19 résolvent complètement le problème (il comporte 3 questions, les 2 premières sont en général traitées, la 3ème est moins réussie). Marc, Mathieu le résolvent complètement.

Conclusion.

Globalement, seule Lidia est en échec. Elle répond correctement à une question numérique et partiellement à 2 questions algébriques.

Sept élèves ont une réussite totale :

Elsa, Grégoire, Louison, Marc, Mathieu,
Olivia, Valérie.

Deux répondent corectement à tout sauf à la 3ème question du problème
Virginie, Yannick.

4. *Travaux des 25-28 Novembre et 2 Décembre (20 élèves).*

Le travail met en relation les cadres numérique, algébrique et graphique.

4.1. Problème : 1) Choisir i et r tels que

$$i + r = \ell$$

ℓ = 5, 2, 8, 14, 12 selon les jours et les équipes.

2) Reporter graphiquement les couples (i,r) le problème est issu de la recherche de rectangles à demi-périmètre fixé.

Tous proposent des solutions entières et reportent graphiquement les couples correspondants. Pour dépasser ce registre limité, ils empruntent 2 voies :

les entiers négatifs
les fractions

La procédure fraction est la suivante :

- ℓ est traitée comme $(\ell-1)+1$ (4+1 ou 1+1 ou 7+1...)
- $1 = \frac{p}{n} + \frac{q}{n}$ avec $p+q = n$
- l'entier restant est décomposé en somme de 2 entiers.

Les fractions sont en général des

$\frac{p}{2}$, $\frac{p}{4}$, $\frac{p}{8}$ mais aussi des $\frac{p}{10}$, $\frac{p}{5}$, $\frac{p}{6}$, $\frac{p}{19}$.

4.2. Choix des élèves.

4.2.1. Font les 2 choix, les exemples sont correctes : 10 élèves.
Bastien - Elsa - Frédérique - Hélène - Isabelle - Louison - Olivia - Valérie - Virginie - Yannick

Tous reportent les couples à coordonnées entières,
Tous sauf Bastien et Virginie ceux à coordonnées $(a + \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2})$

4.2.2. Camilo et Jacques choisissent les entiers négatifs, fournissent une longue liste pour $i + r = 3$.

Jacques reporte la plupart des points, en intervertissant l'ordre des coordonnées dans la notation sur le graphique de couples (x,y) avec $x < o$.

Il donne 1 exemple fractionnaire $(\frac{1}{2}, \frac{2}{2})$ témoignant de sa résistance à sortir du registre des entiers.

4.2.3. Font le choix des fractions.
Gilles - Grégoire - Marc - Mathieu

Tous sauf Marc reportent graphiquement les points à coordonnées $(a + \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2})$

Lidia propose un exemple $7 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ qu'elle reporte graphiquement en (7,1) en le notant $(7\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

4.2.4. Ne sortent pas des entiers.
Kamel - Laurent - Sandrine

Toutefois Laurent repère dans son graphique des points à coordonnées $(a + \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2})$.

Sandrine proposent parmi ses couples

$\frac{1}{5}$ $\frac{4}{5}$; $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{10}$ $\frac{1}{10}$;

elle avait la consigne $i + r = 5$.

Elle reporte graphiquement ces couples, sans aucun rapport avec la graduation "entre" des points à coordonnées entières correctement placés.

5. *Travaux du 5/12/77. (20 élèves)*

5.1. Problème : chacun choisit comme il veut les dimensions d'un rectangle, il calcule son périmètre ou son demi-périmètre et son aire.

Ce travail s'est déroulé le 5/12/77. Nous donnons un compte rendu détaillé des travaux des élèves.

Matériel : les élèves disposent de papier quadrillé pour découper des rectangles s'ils le veulent. L'unité de longueur est la longueur de la maille. L'aire se mesure en mailles du quadrillage.

5.2. Analyse de la tâche et résultats.

- Pour une diversité de valeurs numériques entières ou fractionnaires, les élèves peuvent calculer la somme.

- Pour des valeurs entières, ils peuvent calculer le produit.
- Le problème nouveau est le calcul $a \times b$ fractionnaires. (cf. II.4.7 pour la description de procédures possibles et effectivement mises à l'oeuvre).

. Sur 20 élèves, 11 choisissent des <u>fractions</u> pour les dimensions (cf. Tableau ci-après). Il s'agit de demis ou de quarts. Parmi ces 11 élèves, Bastien - Grégoire - Hélène - Isabelle - Louison et Valérie calculent les sommes et produits choisis, correctement.

- Hélène donne 3 exemples fractionnaires, les 3 sommes, 1 seul produit
- Gilles calcule un produit juste, un produit faux, Mathieu 3 produits justes, un faux.
- Camilo-Elsa - Virginie donnent une somme juste et un produit faux.

. 9 élèves choisissent des <u>entiers</u> : Kamel, Laurent, Lidia, Marc, Olivia, Yannick proposent de nombreux exemples en nombres entiers avec calculs correspondants justes et rectangles découpés à l'appui.

- Frédérique découpe 2 rectangles, note un seul couple de dimensions, avec calculs.
- Jacques découpe 1 rectangle, prépare un tableau à 4 colonnes i - r - ℓ - A avec des traits tirés à la règle et le laisse vide.
- Sandrine ne découpe aucun rectangle,
  . note dans son tableau 3 couples d'entiers avec sommes et produits correspondants
  . note et efface un exemple de dimension avec des demis.

<u>BILAN</u>.

Nous résumons dans un tableau les productions des élèves. Elles nous permettent de regrouper leurs performances en 4 catégories, la catégorie 4 étant la plus performante :

Cat.1 Frédérique, Jacques, Sandrine.
Cat.2 Kamel, Laurent, Lidia, Marc, Olivia, Yannick.
Cat.3 Camilo, Elsa, Gilles, Mathieu, Virginie.
Cat.4 Bastien, Hélène, Grégoire, Isabelle, Louison, Valérie.

Productions des élèves

N O M S	Nombre de rectangle découpés	Nombre de couples de dimensions notés (a,b)	Nombre de dimensions entières	Couples de dimensions fractionnaires	Calcul de la longueur $\ell=a+b$ Ent	fract.	Calcul de aire $A=a\times b$ Ent.	fract.
Bastien	16	5	3	2 : $(6+\frac{1}{2}, 3+\frac{3}{4})$ et $(8;3+\frac{1}{2})$	3	2	3	2
Camilo	9	9	8	1	8	1	8	1faux
Elsa	9	9	8	1	8	1	8	1faux
Frédérique	2	1	1	0	1		1	
Gilles	6	6	4	2	4	2	4	1juste 1faux
Hélène	10	10	7	3	7	3	3	1
Jacques	1	1	1	0	0		0	
Kamel	10	10	10	0	10		10	
Laurent	11	11	11	0	11		11	
Lidia	6	6	6	0	6		6	
Mathieu	15	15	11	4dont $(\frac{2}{4},\frac{2}{2})$	11	4	11	4 (1faux)
Grégoire	5	4	2	2	2	2	2	2
Isabelle	12	12	6	6	6	6	6	6
Louison	4	7	4	3	4	3	4	3
Marc	6	6	6	0	6		6	
Olivia	13	11	11	0	11 (1faux)		11	
Sandrine	0	3+1 effacé	3	effacé	3		3	
Virginie	10	10	9	1	4 (1faux)	1	4	1faux
Yannick	6	6	6	0	6		6	
Valérie	9	9	8	1	8	1	8	1

Lorsqu'aucune indication est donnée, les calculs sont justes.

6. *Comparaison des productions des élèves en situation où ils ont le choix des valeurs (cf.n° 5) et dans un test où les valeurs sont imposées. (passé ce même jour 5/12/77).*

6.1. Choix fractionnaire en situation libre, erreurs au test (notées entre parenthèses).

au plus 3 erreurs au test ou non réponses		plus de 3 erreurs ou non réponses
Bastien (1)	Grégoire (1)	Gilles (6)
Camilo (2)	Isabelle (3)	Mathieu (10)
Elsa (1)	Louison (2)	Virginie (7)
Hélène (1)	Valérie (1)	

6.2. Choix entier en situation libre, erreurs au test

au plus 2 erreurs au test	plus de 2 erreurs ou non réponses
Kamel (2)	Frédérique (7)
Marc (o)	Jacques (13)
Olivia (1)	Laurent (10)
	Sandrine (13)
	Yannick (5)

Nous n'avons pas de copie de Lidia.

6.3. Bilan :
On vérifie la corrélation entre le fait de réussir le test (au plus 3 erreurs ou questions non faites) et le choix de fractions en situation "libre". Notons que Marc et Olivia avaient choisi des fractions dans un contexte analogue le 28/11, la semaine d'avant; chez Gilles, Mathieu, Virginie, l'engagement conceptuel est en avance sur les possibilités techniques. Chez Kamel, c'est plutôt le contraire, (cf. Chapitre IV C.1et 2).

7 . *Travaux du 8/12/77. (19 élèves, absente Lidia).*

Travail : .Choisir et découper des rectangles dont une dimension est imposée.
.Calculer, pour ces rectangles, le demi-périmètre ℓ et l'aire A.
La dimension a est choisie par la maîtresse et varie suivant les élèves. Elle est entière ou fractionnaire.

7.1. Valeur entière :

$a = 4$ pour Frédérique, Mathieu, Sandrine

$a = 10$ pour Jacques, Yannick

Résultats : Tous sauf Jacques choisissent pour l'autre dimension b des valeurs fractionnaires, en plus de valeurs entières.

. Tous calculent correctement ℓ

. Tous, sauf Mathieu, calculent correctement A.

Notons que Frédérique, Sandrine, Yannick ont choisi des nombres de la forme $\frac{p}{2}$ et des entiers, Mathieu a en plus choisi des $\frac{p}{4}$ et $\frac{p}{8}$.

. Tous sauf Frédérique écrivent les équations correspondant à la variation $b \longmapsto a+b$ et $b \longmapsto a \times b$ pour la valeur de a qui les concerne. Par exemple, $\ell = 4+b$ et $A = 4 \times a$.

. Les couples (b,ℓ) calculés sont reportés graphiquement.

7.2. Valeur fractionnaire.

$a > 1$ pour Gilles, Isabelle, Grégoire $a = 6 + \frac{1}{4}$

$a < 1$ pour les autres : $a = \frac{1}{4}$ Kamel, Olivia

$a = \frac{1}{10}$ Bastien, Laurent, Marc

$a = \frac{1}{3}$ Elsa

$a = \frac{3}{5}$ Camilo, Hélène, Louison, Valérie, Virginie

. Les uns choisissent pour b des entiers et des fractions, les autres (Bastien, Camilo, Hélène, Louison, Marc,Laurent) seulement des fractions. Ils calculent correctement ℓ, sauf Laurent.

. Calcul du produit $a \times b$:

i) seulement pour b entiers : Gilles, Grégoire, Olivia

ii) pour b entiers et fractionnaires, les calculs sont justes chez Elsa - Hélène - Isabelle - Kamel - Louison - Marc - Valérie - Virginie

- faux chez Laurent.
- Bastien et Camilo font 1 seul calcul de A malgré plusieurs choix de valeurs pour b

. Tous écrivent les équations er reportent graphiquement les couples (b,ℓ) trouvés, pour b entier en général. Nous ne décrivons pas les erreurs de report correspondant aux autres valeurs. Un caractère toutefois est respecté : l'alignement des points.

8. *Travaux du 13/12/77. (17 élèves, absents Frédérique, Jacques,Louison)*

Le travail est en principe le même que le 8/12 : il s'agit de calculer le demi-périmètre ℓ et l'aire A d'un rectangle dont une dimension est fixée choisie par la maîtresse. Mais le registre numérique change un peu :

$$a = \frac{9}{5} \;,\; \frac{4}{3} \;,\; \frac{13}{10} \;,\; \frac{7}{10} \;,\; \frac{3}{4}$$

Le détail des productions figure dans le tableau ci-après Gilles, Olivia et surtout Laurent évoluent par rapport au 8/12. Les produits de fractions sont justes. Laurent comme quelques autres déjà (Bastien, Isabelle...) utilise un pavage d'une partie du carré unité, adapté à ses valeurs numériques.

Grégoire, Isabelle, Lidia, Mathieu essaient par leurs choix de limiter la complexité.

Sandrine ($a = \frac{7}{10}$) ne produit aucune réponse ni par calcul, ni par dessin.

Jacques est absent.

Détail des productions des élèves (13/12/77)

Bastien $a = \frac{9}{5}$ 11 exemples, dont :

. 4 du type $b = k + \frac{9}{5} \rightarrow p = k + \frac{18}{5}$.

le calcul de A est faux, puis repris pour l'un d'eux $b = 9 + \frac{9}{5}$. Le calcul refait est juste, mais compliqué → changement de type d'exemples

. 7 exemples du type $b = \frac{k}{10}$ (k pair)

les calculs sont justes : $\ell = \frac{9+k/2}{5}$; $A = \frac{9 \times k/2}{25}$

Camilo : $a = \frac{4}{3}$, 6 exemples : 5 fractions, 1 entier

Il calcule ℓ et A.

Elsa : $a = \frac{13}{10}$, 8 exemples : 4 fractions, 4 entiers

Elle calcule ℓ et A

Grégoire : $a = \frac{3}{4}$, 4 exemples : 1 entier, 3 fractions

Il calcule ℓ et A (A faux pour 2 fractions).

Hélène : $a = \frac{3}{4}$ des exemples presque tous entiers mais écrits sous forme fractionnaire.

Isabelle : $a = \frac{9}{5}$ 4 exemples : 3 entiers, I fraction.

Elle calcule ℓ et A (A faux pour la fraction).

Kamel : $a = \frac{7}{10}$ 4 exemples du type : $b = \frac{k}{10}$

Il calcule $\ell = \frac{4+7}{10}$ et $A = \frac{k \times 7}{100}$ (un seul rectangle découpé)

Laurent : $a = \frac{3}{4}$ 8 exemples dont 7 du type $b = \frac{k}{4}$

Il calcule $\ell = \frac{k+3}{4}$ $A = \frac{k \times 3}{16}$ (rectangles découpés)

et exemple : $\frac{5}{8} \rightarrow \ell = \frac{11}{8}$ $A = \frac{15}{32}$

Lidia : $a = \frac{13}{10}$ 4 exemples entiers. Calculs justes - pas un dessin.

Marc : $a = \frac{7}{10}$ 5 exemples du type $b = \frac{k}{10}$ ou $n + \frac{k}{10}$

les calculs sont justes (5 rectangles découpés sur papier blanc).

Mathieu : $q = \frac{9}{5}$ 6 exemples entiers - quelques erreurs de calculs pour ℓ
calculs justes pour A.

1 exemple $\frac{1}{2}$, calcul de ℓ faux : $\frac{9}{5} + \frac{1}{2} = \frac{10}{7}$

Olivia : $a = \frac{4}{3} = 1+\frac{1}{3}$ 3 exemples $b = 3 \rightarrow \ell = 4 + \frac{1}{3}$ $A = 4$

$b = \frac{28}{13}$ $\ell = \frac{p}{39}$ $A = \frac{52}{39}$

dessin de $(1+\frac{1}{3}, 2+\frac{2}{13})$

$b = \frac{9}{4}$ $\ell = \frac{p}{12}$ $A = \frac{36}{12}$

Sandrine : $a = \frac{7}{10}$ 4 exemples du type $b = \frac{k}{10}$ Aucun calcul
Aucun dessin

Valérie : $a = \frac{13}{10}$ 6 exemples du type $b = \frac{k}{10}$

calculs justes pour ℓ ; $\ell = \frac{k+13}{10}$

calculs tous faux de la même manière pour A :

Par exemple, $\frac{29}{10} \times \frac{13}{10} = \frac{227}{100}$

on remarque que $2 \times 1 = 2$
$3 \times 9 = 27$ $\rightarrow 2\ 27$

(Son algorithme traduit une omission des termes rectangles)

Virginie : $a = \frac{7}{10}$ 8 exemples du type $b = \frac{k}{10}$

Calculs justes : $\ell = \frac{k+7}{10}$ $A = \frac{k\times 7}{100}$

Yannick : $a = \frac{7}{10}$ 5 exemples entiers. Calculs justes, A sous forme $p+\frac{k}{10}$

1 exemple : $\frac{1}{10} \rightarrow \ell = \frac{8}{10}$ $A = \frac{7}{100}$

9. *Travaux du 16 Janvier 1978. (17 élèves, absents Gilles, Jacques, Yannick)*

- Recherche de couples (a,b) tels que $a \times b = 24$
- Report graphique. Autres couples.

9.1. Ce travail vient après celui du 12/1/78, où les élèves ont cherché des couples de dimensions (a,b) tels que l'aire du rectangle R(a,b) soit 24 carreaux.
Parallèlement, ils découpaient les rectangles correspondants.

Le 13/1/78, les élèves ont systématisé un procédé permettant d'obtenir un grand nombre de rectangles de la famille à partir d'un seul. C'est (a,b) $\longmapsto (\frac{a}{k}, b\times k)$ pour toutes les valeurs de k qu'on veut (k est en général entier, se pose à un moment la question pour $k = \frac{1}{3}$); les élèves ont construit 3 ou 4 rectangles à partir du couple (3,8) en particulier $(1+\frac{1}{2}\ ;\ 16)$ (1;24) $(\frac{1}{5}\ ;120)$.

A l'occcasion du regroupement, le 16/1, des résultats précédents (pour en faire un report graphique) on constate que les couples sont du point de vue numérique soit des couples de nombres entiers, soit l'un des nombres est de la forme $\frac{1}{n}$ et l'autre $24 \times n$. Pourtant, le graphique, pour pouvoir être dessiné nécessite des points dans l'espace de la feuille, c'est à dire des points dont les coordonnées se situent entre 0 et 20 à peu près. Autrement dit, il n'est pas possible de reporter $(\frac{1}{5}, 120)$ à moins de renoncer à la symétrie de la représentation et prendre des échelles différentes sur les 2 axes. Or un des arguments sur lequel les élèves s'appuient est le suivant : "un calcul donne 2 points pour la courbe, parce que (a,b) et (b,a) donne la même aire, on a seulement tourné le rectangle".

Nous analysons ci-dessous les propositions des élèves en comparant les couples inscrits en listes numériques et ceux indiqués sur le graphique.

Nous verrons que certains élèves sont amenés à interpoler.

9.2. Couples repérés graphiquement.
Détail par enfant.
Tous reportent les couples de la liste qu'il est possible de repérer compte tenu des limites de la feuille. Le report est en général correct pour les points à coordonnées entières et pour leurs symétriques par rapport à la diagonale $a = b$.

Nous rapportons les repérages de points dont les coordonnées sont inscrits sur le graphique mais ne sont pas sur la liste numérique ou dont la disposition matérielle laisse penser qu'elles ont été inscrites dans un 2ème temps (par exemple après la lecture graphique et peut-être contrôle par le calcul).

Bastien : $(5 ; 4+\frac{4}{5})$, $(10 ; \frac{2}{5})$

l'axe de symétrie $a = b$ est tracé. Une zone limitée par ox,oy et une ligne imaginaire passant par les points repérés est coloriée en bleu.

Camilo : $(5 ; \frac{24}{5})$. L'axe de symétrie est tracé. Les points sont reliés 2 à 2 par des traits droits.

Elsa : $(5 ; \frac{24}{5})$, $(10 ; \frac{24}{10})$, $15 ; \frac{24}{15})$,$(20 ; \frac{24}{20})$ et leurs symétriques par rapport à l'axe a = b qui est tracé. Tous les points sont correctement placés (et les coordonnées notées sur le graphique comme nous l'avons déjà indiqué).

Frédérique : $(5 ; 4+\frac{4}{5})$, $(10 ; 2+\frac{2}{5})$,$(15 ; \frac{8}{5})$ $(20 ; \frac{6}{5})$. Tous ces couples sont notés sur la liste numérique, les 3 derniers notés sur le graphique à côté des points correspondants. L'axe de symétrie est tracé après pliure.

Grégoire : a fait le même travail qu'Elsa

Hélène : $(5 ; 4+\frac{4}{5})$, $(10 ; 2+\frac{2}{5})$, $(15 ; 1+\frac{3}{5})$ et leurs symétriques. L'axe de symétrie est tracé. Les couples ci-dessus sont inscrits sur la liste numérique.

Isabelle : $(5 ; \frac{24}{5})$, $(10 ; \frac{24}{10})$ et leurs symétriques. L'axe de symétrie est tracé après pliure.

Kamel fait 2 listes : l'une comporte 6 couples d'entiers suivis de 5 couples. de la forme $(\frac{1}{n} ; 24\times n)$, l'autre comporte 4 couples$(10 ; \frac{24}{10} = 2+\frac{4}{10})$ puis $7 ; \frac{24}{7} = 3+\frac{3}{7}$ puis $15 ; \frac{24}{15} = 1+\frac{9}{15}$ enfin $20 ; \frac{24}{20}$

Tous sauf $(7 ; 3+\frac{3}{7})$ ont leurs correspondants sur le quadrillage. Les points sont reliés 2 à 2 par des traits droits. Toute la zone située sous cette ligne et limitée par les axes ox,oy est coloriée.

Laurent : note sur sa liste 4 couples d'entiers qu'il reporte graphiquement ainsi que les symétriques, 7 couples $(\frac{1}{n}, 24\times n)$ puis $(10 ; \frac{24}{10} = 2+\frac{4}{10})$ placé à$(10 ; 2+\frac{2}{10})$ effacé, replacé à(10 ; 2) Les points restent isolés sur le graphique, une légère marque au crayon souligne le croisement (2 ; 10). L'axe de symétrie est indiqué par pliage, tracé et noté Z (désignation dans l'étude de la symétrie un an plus tôt).

Lidia : note sur sa liste 6 couples d'entiers et 5 de la forme $(\frac{1}{n} , 24\times n)$. Seuls les points à coordonnées entières sont notés (y compris (2 ; 12) et (12 ; 2) non notés sur la liste). Un trait dessiné à la main enfile les points du premier au dernier repéré sur la feuille. L'axe de symétrie est marqué par pliure.

Louison : $(5 ; \frac{24}{5})$, $(10 ; \frac{24}{10})$, $(20 ; \frac{6}{5})$ les deux premiers couples sont inscrits sur la liste : un espace les sépare de la liste formée des entiers et inverses d'entiers pour a.
Les points sont joints à la règle sur le graphique. L'axe de symétrie est tracé.

Marc : a seulement reporté les couples d'entiers,l'axe de symétrie est indiqué par pliure. 8 exemples en nombres entiers, 5 exemples avec a de la forme $\frac{1}{n}$.

Mathieu : note sur sa liste 8 couples à coordonnées entières, il note $(\frac{1}{2} ; 48)$ $(\frac{1}{4} ; 96)$ (18 ;). Sur le graphique, il repère $(\frac{24}{20} ; 20)$ $(\frac{24}{10} ; 10)$ $(\frac{24}{5} ; 5)$ et leurs symétriques. L'axe de symétrie est tracé.

Olivia : note sur sa liste 8 couples en nombres entiers, 9 de la forme $(\frac{1}{n} , n\times 24)$ puis $(18 ; 1+\frac{1}{3})$ $(20, 1+\frac{1}{5})$ $(10, \frac{24}{10})$. Sur le graphique sont notés en plus des couples d'entiers :

$(5 ; \frac{24}{5})$ $(10 ; \frac{24}{10})$ $(18 ; 1+ \frac{1}{3})$. L'axe de symétrie est tracé

$(20 ; 1+ \frac{1}{5})$. La feuille graphique est prolongée pour placer $(\frac{1}{2} ; 48)$

Sandrine : note 4 couples d'entiers sur sa liste, 4 couples $(\frac{1}{n}, 24\times n)$ et $(5 ; \frac{24}{5})$. Elle ne reporte graphiquement que les couples d'entiers.

. L'axe de symétrie est marqué par pliage et souligné par un trait.

. Les points de (2 ; 12) à (12 ; 2) [3 points et leurs symétriques] sont reliés 2 à 2 par un trait, le point (1,24) est resté isolé.

Valérie : fait à peu près le même travail qu'Olivia.

Virginie repère sur son graphique les points et couples $(5 ; 4+ \frac{4}{5})$ $(10 ; 2+ \frac{2}{5})$ $(15 ; \frac{8}{5})$ $(20 ; \frac{6}{5})$. L'axe de symétrie est tracé.

La description détaillée des productions nous permet de regrouper les élèves selon le type de couples de nombres manipulés et leur mode de traitement.

9.3. Catégories de couples de nombres et report graphique.

a) Les couples de nombres signalés soit sous forme de listes de nombres en correspondance, soit graphiquement, soit les 2 à la fois sont de 3 types.

Type 1 : les 2 coordonnées a et b sont des nombres entiers : ce sont des diviseurs de 24

Type 2 : a est de la forme $\frac{1}{n}$ et b de la forme $24\times n$

Type 3 : a est entier et $b = \frac{24}{a}$ indiqué ainsi ou sous une forme équivalente : fraction réduite ou partie entière plus une fraction inférieure à 1.

Nous indiquons sous forme de tableau pour chaque élève et selon le type de couples les correspondances entre la liste et le graphique. La désignation L-G indique que les couples notés en liste sont repérés et indiqués sur le graphique. L'une des désignations L ou G indique que l'autre aspect n'est pas pris en compte.

B I L A N (17 élèves)

Type 1		Type 2	Type 3
Bastien	L-G	L	G
Camilo	L-G	L	G
Elsa	L-G	L	G
Frédérique	L-G	L	G-L
Grégoire	L-G	L	G
Hélène	L-G	L	G-L
Isabelle	L-G	L	G
Kamel	L-G	L	G-L
Laurent	L-G	L	G: 1 seul avec erreur de position
Lidia	L-G	L	G
Louison	L-G	L	G (2 sur 3 en L)
Marc	L-G	L	G
Mathieu	L-G	L	G
Olivia	L-G	L(1 en G)	G-L
Sandrine	L-G	L	1 couple en L
Valérie	L-G	L	G-L
Virginie	L-G	L	G

b) Report graphique.

Les points sur graphique sont tous correctement situés à un près (cf. Laurent). Mais ils peuvent être reliés ou non reliés par un trait 2 à 2 ou par une ligne arrondissant les angles. Cette ligne peut être limitée aux points extrêmes repérés ou les dépasser et se rapprocher nettement de l'axe horizontal d'un côté, de l'axe vertical de l'autre sans toutefois le toucher (cf. la réflexion d'Hélène : $0\times x \neq 24$).

Donnons les détails des graphiques :

. points reliés, ligne prolongée, zone inférieure coloriée :

Bastien - Grégoire - Hélène - Valérie

. points reliés, ligne arrêtée aux points extrêmes

zone inférieure coloriée	ligne seule tracée
Camilo - Elsa - Isabelle Kamel - Louison - Mathieu Olivia - Virginie	Frédérique - Lidia Marc - Sandrine

. points isolés : Laurent

Bilan : le graphique est réducteur et producteur par rapport à la liste numérique pour au moins 9 élèves et peut être 14 (9 + 5)

. le graphique est seulement réducteur pour 3 élèves : Lidia - Marc - Sandrine.

10. *Travaux du 19 Janvier 1978. (19 élèves, absent Gilles)*

10.1. Enoncé : Colorier le quadrillage en 3 couleurs

$a \times b > 25$ point rouge

$a \times b < 25$ point bleu

$a \times b = 25$ point noir

10.2. Procédures.

P_1 a) On choisit un point sur le quadrillage, on lit ses coordonnées, on calcule $a \times b$ on compare à 25

b) On choisit des couples de nombres (a,b), on calcule $a \times b$, on compare à 25, on attribue une couleur au couple, on reporte graphiquement.

Les valeurs sont prises

- un peu partout

- plutôt de manière que $a \times b$ ne soit pas trop loin de 25.

- de manière à se ramener à 1 variable: a = b / a fixé / b fixé

P_2 : coloriage par secteur, à partir d'un point colorié.

P_3 : recherche systématique des points-frontière et coloriage des demi-droites horizontales ou verticales définies par ces points.

10.3. Bilan des productions.

10.3.1. Tous les points ont même statut

Frédérique - Jacques - Sandrine colorient, relativement à la tâche, peu de points. Ils emploient une procédure P_1 plutôt sous sa forme a, ce qui représente tout de même beaucoup de calculs.

On remarque cependant sur le graphique, des points repérés par des coordonnées qui ne sont pas dans la liste numérique, les valeurs sont choisies un peu n'importe où.

10.3.2. Des directions privilégiées.

Laurent - Marc - Kamel - Louison - Olivia - Valérie écrivent des couples de nombres en liste, repèrent les points correspondants, et d'autres ; en tout une vingtaine de points pour Laurent et Marc, beaucoup plus pour les autres. Une bonne partie d'entre eux s'organisent selon une direction privilégiée.

- une horizontale (b fixé), une verticale (a fixé) la diagonale (a=b)
- autour des (a,b) tels que $a \times b = 25$

En fait, tous sauf Frédérique, Jacques, Sandrine arrivent à ce choix, soit en première procédure, soit après avoir placé quelques points ailleurs.

10.3.3. Recherche de la frontière.

Elsa marque 2 points-frontière ($a \times b=25$) et les relie par un trait, puis s'organise autour de ce trait.

Bastien et Camilo font une recherche systématique des points-frontière. Ils l'utilisent comme points séparateurs pour le coloriage de verticales ou d'horizontales (les verticales sont privilégiées dans le dessin) : rouge au dessus, bleu au dessous.

11. *Travaux du 20-23 Janvier 1978 et test*

(17 élèves, absents Gilles, Jacques, Lidia)

11.1. Travaux.

Même consigne de coloriage du quadrillage que le 19/1, avec la référence n = 9.

Les procédures évoluent vers un coloriage par secteurs. Nous présentons les productions en les classant selon les procédures adoptées.

P_2 . Coloriage par secteur à partir d'un point colorié
- rouge en haut et à droite d'un point rouge ou noir
- bleu en bas et à gauche d'un point bleu ou noir

Frédérique - Laurent - Mathieu - Yannick utilisent cette procédure pour la zone rouge, mais pour la bleue, ils colorient seulement des points ou des demi -droites.

Kamel - Isabelle - Louison - Marc - Sandrine - Valérie utilisent la procédure dans les deux zones.

P_3 a) Coloriage par secteur à partir d'un point frontière Elsa - Hélène

b) Coloriage par bandes verticales entre 2 demi-droites issues de points frontière, arrêtées au plus haut ou au plus bas des 2, selon le cas
Bastien - Camilo - Virginie

P_4 . Tracé d'une ligne noire passant par de nombreux couples (a,b) tels que $a \times b = 9$. Le tracé est soit arrondi soit linéaire entre 2 points
Grégoire - Hélène - Marc - Mathieu - Olivia -
Valérie - Virginie (en partie)

la ligne est séparatrice pour Grégoire - Olivia qui colorient systématiquement rouge au dessus bleu en dessous.

Pour Hélène, elle sert à repérer une erreur et à compléter le coloriage. Elle note "j'ai mis trop de bleu, je me suis trompée".
Marc - Mathieu - Valérie - Virginie
la font passer comme un chemin dans la zone laissée blanche.

11.2. Test 23/1/78.

Il s'agit de calculer soit a, soit b dans un produit $a \times b$ donné, l'autre nombre étant également donné. Les choix numériques sont soit entiers soit fractionnaires.

12. *Test du 13 Mars 1978. (19 élèves, absent Camilo)*

Ce test se place dans le cours d'une suite de séquences consacrées à l'agrandissement (resp.réduction) de puzzles, aux rapports entre les longueurs données-longueurs construites, aires données - aires construites. Ce thème de travail s'étale du 7 au 21 Mars 1978. Le 13 Mars, la maîtresse veut évaluer et faire le point sur les acquis du point de vue de la correspondance entre longueurs dans un certain champ numérique.

12.1. Analyse de la tâche.

Le test comprend 5 études. Chacune est du type :

Polygone P	A 2,5 cm	$\xrightarrow{\text{devient}}$	A_1	côtés donnés en cm
	B 13		B_1	
	C 24		C_1	
	D 6,2		D_1	
	E 39,2		E_1	
	x		y	

autrement dit, il s'agit d'un agrandissement ou réduction d'un polygone à 5 côtés dont on indique les mesures en cm et la mesure d'un côté transformé. Le terme "devient" dans le contexte de la classe est sans ambiguïté. Les 5 études correspondent à 5 valeurs numériques différentes de la donnée A_1.

Le choix de ces valeurs exprime, de la part de la maîtresse, une hiérarchie dans la difficulté : 2,5 cm $\longmapsto$ 5cm puis 1,25cm puis 7cm, puis 14cm, puis 15cm.

L'attente est la suivante : en cours de situation, les élèves ont mis en oeuvre la linéarité pour exprimer la correspondance dont il s'agit ici. On peut prévoir que le modèle linéaire est plus ou moins disponible chez les élèves, selon les valeurs numériques des données. On peut être un peu plus optimiste et penser que l'outil mathématique est disponible mais que les moyens techniques pour l'exprimer différeront selon les valeurs numériques des données. Dans tous les cas, ces dernières constituent pour nous une variable didactique qui va nous servir à baliser le champ d'action, pour l'élève, de l'outil mathématique concerné.

Mathématiquement, le problème se présente de la façon suivante : étant donné $a \longmapsto b$, trouver les images de diverses valeurs a_i. Pour cela, plusieurs procédures sont possibles :

- une procédure scalaire : $a_i = k_i \times a$ donc $b_i = k_i \times b$
- une procédure fonction : $b = x \times a$ donc $b_i = x \times a_i$ pour n'importe quel a_i.

On peut prévoir que les élèves détermineront leur choix de procédure selon la facilité ou la difficulté technique à obtenir les coefficients k_i ou le coefficient x. On peut pour le calcul de x chercher l'image de 1. On peut envisager aussi une procédure purement algébrique, issue d'un transfert au cadre algébrique de la recherche d'un rectangle connaissant l'aire et une dimension. L'équation $a \times x = b$ est alors un signifiant pour 2 signifiés différents. La réponse numérique est $x = \frac{b}{a}$. Transféré au problème d'agrandissement de puzzle, elle fournit le coefficient x sous une écriture fractionnaire.

Rappelons qu'un des objectifs de l'apprentissage est de disposer de divers outils et de choisir le mieux adapté à la situation.

Nous analyserons les procédures au regard de cet objectif. Les choix numériques ont été faits pour cela. Dans la correspondance

T_1 : 2,5 cm $\longmapsto$ 5cm le facteur 2 est évident,

T_2 : 2,5 cm $\longmapsto$ 1,25 cm le facteur $\frac{1}{2}$ est un peu moins évident, mais compte tenu de la pratique numérique des élèves, il devrait être repéré.

Le choix T_3 : 2,5 $\longmapsto$ 7 correspond à une volonté d'introduire une difculté technique incitant à donner de la signification en terme de mesure au coefficient : c'est l'image de 1cm. Or la suite 2,5 - 5 - 10 - 1 est facile à établir sur le plan technique. Autrement dit, si on dispose des 2 procédures scalaire et fonction, le choix efficace consiste à les combiner.

Le choix T_4 : 2,5 $\longmapsto$ 14 est une tentative pour repérer la relation éventuelle entre correspondance entre mesures et correspondance entre fonctions, dans un cas très simple du point de vue numérique.

Le choix T_5 : 2,5 $\longmapsto$ 15 est encore une tentative pour mettre en rapport deux fonctions du même type. Les mesures 14 et 15 sont proches, pour les autres mesures de départ, les mesures construites devraient aussi être proches. D'où un moyen de contrôle des calculs.

Par ailleurs, le texte de l'épreuve comporte des cases vides, mais aucune question explicite. Autrement dit, les élèves peuvent comprendre qu'il faut remplir toutes les cases, mais aussi qu'il suffit, pour chaque série, de donner un procédé de calcul des valeurs à leur attribuer. En désignant par x la mesure de départ et y la mesure construite il suffirait de donner la relation entre x et y. Il est demandé aux élèves de faire leurs calculs au dos de la feuille et de ne rien effacer. Ce sont les traces que nous avons des procédures.

12.2. Réponses et procédures.

Nous présentons dans l'ordre les productions pour les transformations T_1, T_2, T_3, T_4, T_5.

12.2.1. Transformation T_1.

. Tous proposent le doublement des mesures à une exception près, Louison. Celui-ci multiplie ses mesures par 4, écrit $y = 4 \times x$; puis s'apercevant de son erreur, il barre les calculs, les refait correctement mais ne rectifie pas l'équation. Laurent ne fournit aucune relation.

Tous les autres fournissent la relation sous la forme $y = x \times 2$ (12 élèves) $y = 2 \times x$ (5 élèves).

. Tous effectuent les 4 calculs, y compris Laurent. Ils sont en général justes. Frédérique et jacques commettent chacun une erreur de calcul. Signalons celle de Jacques : 6,8 $\longmapsto$ 12,16 mais 39,2 $\longmapsto$ 78,4 (il n'y a pas de retenue dans la partie décimale).

12.2.2. Transformation T_2

. Equations :
- Frédérique propose $y = 2 \times x$ soutenue par un doublement des valeurs numériques.
- Sandrine écrit $x \times 1,20$
- Jacques aucune

Hormis ces cas :

Tous proposent la relation attendue entre x et y sous la forme $y = x \times \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2} \times x$ ou $y = \frac{x}{2}$.

. Calculs : Gilles effectue un seul calcul et donne l'équation.

Tous les autres font les 4 calculs. Ils sont justes à 3 cas près : Frédérique (voir plus haut), Sandrine et Jacques qui commettent des erreurs.

12.2.3. Tranformation T_3

. Equation : 14 élèves produisent une expression algébrique correcte de T_3.

La formulation est diverse.

- $y = 2,8 \times x$ Bastien, Frédérique, Gilles, Hélène, Lidia, Marc, Virginie.

- $y = \frac{28}{10} \times x$ Elsa, Grégoire, Valérie.

- $y = \frac{28}{10}$ à côté de 2,5 — 7 Louison
5 — 14
10 — 28
1 — $\frac{28}{10}$

- $y = \frac{14}{5} \times x$ Kamel, Laurent, Olivia

On trouve aussi des formulations approchées par rapport au problème.

- $y = 3 \times x$ Isabelle

$(y = x \times 3)$ $(y = x \times 2,6)$ Yannick

On recense enfin des expressions erronées.

$y = 4,16$ Mathieu

$y = 4,5$ Sandrine

$y = x \times 4,6$ Jacques

. Procédures.

- Procédure non exprimée, peu ou pas de calcul
Bastien - Lidia - Marc (équation correcte)
Jacques - Mathieu - Sandrine (formulation erronée)

P_0 - Recherche du coefficient de l'application linéaire par test numérique 2 puis 3,....

Hélène jusqu'à 2,8
Isabelle s'arrête à 3
Yannick s'arrête à un encadrement 3; 2,6
Gilles commence une recherche par test et change de procédure.

P_1 - Procédure scalaire par doublement de la variable suivie de la recherche de f(1).

Gilles double bien au delà de 10
Grégoire s'arrête à $10 \longmapsto 28$
Gilles (s'apercevant de son dépassement souligne $10 \longmapsto 28$

Frédérique, Louison, Olivia, Valérie, Virginie, arrivés à $10 \longmapsto 28$ continuent par $1 \longmapsto \frac{28}{10}$ Olivia simplifie et écrit $\frac{14}{5}$, Elsa double à partir de $25 \longmapsto 70$ et arrive à $1 \longmapsto \frac{280}{100}$.

P_2 - Procédure "rapport"

Grégoire après sa liste écrit

$2,5 = 10 \times 0,25$ $10 \times x = 28$

$7 = 28 \times 0,25$ $x = \frac{28}{10}$

P_3 - Procédure algébrique

Kamel et Laurent (s'inspirant sans doute de Kamel)

$2,5 \longmapsto 7$

$5 \longmapsto 14$ $y = \frac{14}{5} \times x$

. Calculs

- 11 élèves calculent toutes les valeurs numériques
Elsa (1 erreur de virgule), Frédérique (1 erreur)
Gilles (3 erreurs), Grégoire*, Hélène (1erreur),
Isabelle*, Louison*, Marc*, Olivia (2 erreurs),
Virginie (1 erreur), Yannick (pour $y = 3 \times x$, juste)
- Font 2 calculs sur 4 : Bastien - Sandrine
- 1 calcul : Laurent ($13 \times \frac{14}{5} = \frac{182}{5}$)
- aucun calcul : Jacques, Kamel, Lidia, Mathieu, Valérie

* indique que tout est juste.

12.2.4. Transformation T_4

. Les procédures sont celles de T_3 auxquelles s'ajoute P_4 et qui consiste à repérer que $14 = 2 \times 7$ et à doubler le coefficient de T_3.

. La transformation est exprimée sous diverses formes. Nous mettons en relation les formulations et les procédures.

- Une équation correcte.

$\not{P}$: Bastien - Lidia

P_o : Hélène - Marc

P_1 : Elsa - Frédérique - Louison - Olivia - Virginie

P_2 : Grégoire

P_4 : Kamel - Laurent - Valérie

- Liste ou coefficient seul

P_1 : Gilles - Isabelle

- Estimation du coefficient (P_o) : Yannick

- rien : Jacques - Mathieu - Sandrine

Notons les changements de procédure de T_3 à T_4

Isabelle passe de P_o à P_1

Marc de $\not{P} \rightarrow P_o$

Yannick de P_o fourchette $\longrightarrow$ estimation

Relativement peu de valeurs numériques sont calculées. Du moins, peu d'élèves calculent. Ce sont Elsa (tout juste), Frédérique (2 erreurs), Grégoire (1 erreur), Hélène (1 erreur), Olivia (1 erreur), Virginie (2 erreurs).

12.2.5. Tranformation T_5

Les réponses sont analogues à celles de T_4. Le coefficient étant un entier, Yannick en donne sa valeur et non pas une estimation. La réponse majoritaire est le coefficient 6 ("rien" pour Sandrine et Mathieu seulement).

12.3. BILAN.

Hormis jacques et Sandrine qui ne réussissent qu'en T_1 et Mathieu en T_1 et T_2, les 16 autres manifestent une reconnaissance de l'outil adapté. On pourrait voir dans le choix de la procédure, la marque de conceptions différentes chez l'élève, de nature plutôt topologique pour la procédure P_o, plutôt algo-

rithmique pour les P_2, P_3, P_4. En termes de cadres, on peut dire que les uns (recourant à P_o et aussi peut être P_1) s'inspirent du cadre géométrique pour traiter les nombres, les autres travaillent entre le cadre algébrique et le cadre numérique, plutôt sur les signifiants. Ces deux comportements ne s'excluent pas comme en témoigne Grégoire en adoptant P_1 puis P_2.

13. *Epreuve du 22 Mai 1978. (18 élèves, absents Hélène - Isabelle)*

13.1. Enoncé.

Les 4 opérations à effectuer sont écrites au tableau, dans l'ordre suivant

1) Soustraction
$$\begin{array}{r} 9043,12 \\ -\ 5928,7 \\ \hline \end{array}$$

2) Multiplication
$$\begin{array}{r} 278,5 \\ \times\ 4,087 \\ \hline \end{array}$$

3) Division
$$124,82 \;\big|\; \underline{8,35}$$

4) Addition
$$\begin{array}{r} 253,75 \\ +\ 3437,973 \\ \hline \end{array}$$

13.2. Analyse de la tâche.

L'addition et la soustraction sont des opérations familières. Leur difficulté est essentiellement celle provenant des entiers. Pour les multiplications de complexité moyenne ou grande, la pratique des élèves est plutôt une présentation en tableau. Celle-ci évacue les erreurs dûes aux décalages et celles dûes aux retenues des multiplications élémentaires pour ne maintenir que les difficultés éventuelles dues aux retenues d'addition. Or ici, le choix numérique est méchant dans la mesure où dans 4,087 la multiplication du 8 par le 5 de 278,5 va produire un 0 terminal et qu'il ne faudra le confondre ni avec le décalage ni avec le 0 de la multiplication de 0 par 278,5. On peut donc s'attendre à un échec important sur cette opération.

La division est de pratique récente. Son extension, en tout cas, aux nombres décimaux est nouvelle. En revanche, les élèves ont en principe une bonne pratique de la recherche de x tel que $x \times a = b$. Ici d'une part x s'écrit de manière conventionnelle $\frac{b}{a} = \frac{124,82}{8,35}$ auquel on peut attacher au moins 2 signifiés et même 3 :

- dans la situation des rectangles c'est l'une des dimensions d'un rectangle dont l'autre est 8,35 et l'aire 124,82 (pour des unités bien choisies de longueur et aire).

- C'est le coefficient qui caractérise l'agrandissement d'une figure dans laquelle une longueur de 8,35 u devient 124,82 u.

- C'est aussi ce qui traduit la direction de la droite qui représente graphiquement la correspondance :

$a \longmapsto \frac{124,82}{8,35} \times a$ dans l'agrandissement ci-dessus.

D'autre part on peut situer x parmi les nombres qu'on connait en cherchant à situer 124,82 parmi les multiples entiers de 8,35, cela donnera le quotient entier. On peut chercher éventuellement à déterminer x avec une précision plus grande dans l'échelle des nombres en dixièmes, centièmes....

Ici, nous n'attendons pas plus qu'un quotient entier.
Nous noterons les procédures de division dans la mesure où elles sont exprimées.

13.3. Résultats.

13.3.1. Addition : 15 opérations justes sur 18
Laurent, Olivia font une opération juste quant aux chiffres, mais n'indiquent pas de virgule.
Yannick indique la virgule avec une erreur de position.

13.3.2. Soustraction : 14 opérations justes sur 18
Bastien et Camilo inventent une retenue quand il n'y en a plus.
Laurent, Lidia oublient une retenue
Il n'y a pas d'erreur de virgule.

13.3.3. Multiplication :
4 opérations justes : Elsa, Mathieu, Olivia, Valérie
2 erreurs de virgule : Grégoire, Louison
2 erreurs de retenue d'addition : Bastien, Frédérique (plus une erreur de virgule).
7 erreurs de décalage : Gilles, Jacques, Kamel, Laurent, Lidia, Sandrine, Virginie.
5 erreurs dans les multiplications élémentaires :
Camilo, Laurent, Lidia, Marc, Yannick

Remarquons que si Laurent est en échec général, Jacques et Sandrine ont additionné et soustrait correctement.

13.3.4. Division.

a) 3 élèves calculent un quotient au $\frac{1}{10}$: Camilo, Kamel, Olivia

- Camilo calcule systématiquement les multiples de 835 jusqu'à obtenir 835×14 puis il pose la division, la soustraction intermédiaire et fait une faute de calcul qui toutefois n'entraîne pas d'erreur dans le quotient décimal.

- Kamel pose de façon efficace sa division et soustraction intermédiaire et produit un quotient décimal correct.

- Olivia calcule systématiquement les multiples de 835 jusqu'à 9 comme une table de multiplication, puis de 2 manières (standard et en tableau) la multiplication de 835 par 14. Elle pose la division alors sous forme standard et calcule le quotient au $\frac{1}{10}$.

b) 5 élèves calculent un quotient entier - Bastien, Elsa, Gilles, Grégoire, Valérie. Bastien, Elsa et Grégoire la pose de manière ordinaire en notant toutefois les soustractions intermédiaires.

Grégoire note en plus $124,82 : 8,35 = 14 + \frac{7,92}{8,35}$

Gilles calcule $R_2 = 2 \times 8,35$; $R_4 = 4 \times 8,35$; $R_8 = 8 \times 8,35$; $16 \times 8,35$ puis procède par addition à partir des résultats : $R_8 + R_4$ puis le résultat $+ R_2$ puis le résultat $+ 8,35$ et donne comme expression de la division : $124,82 \left| \frac{8,35}{14,} \right.$

Valérie calcule les multiples de 835 de 1 à 5. Elle pose la division de manière ordinaire sans soustraction intermédiaire mais on voit la trace au crayon, effacée de 4132 - 3340 qui correspond au calcul du 2ème reste.

c) 6 élèves réduisent la complexité de la tâche en "oubliant" par la pensée la partie décimale de 8,35 et en calculant correctement, au $\frac{1}{10}$ près, parfois le quotient de 124,82 par 8. Il est possible toutefois que ce soit une recherche du quotient approché avec dérapage en cours de route.

Ce sont Frédérique, Laurent, Lidia, Louison, Sandrine, Virginie

d) 1 élève commet une erreur dans la disposition des nombres de la première soustraction intermédiaire et se bloque : Marc

e) 3 élèves ne font rien : Jacques, Mathieu, Yannick.

13.4. BILAN.

Les résultats confirment une certaine familiarité avec l'addition et la soustraction des nombres entiers que la virgule ne perturbe pratiquement pas.

La multiplication est un échec massif : il n'y a toutefois que 7 erreurs de décalage sur 18 .

Les procédures dans l'opération de division montrent à quel point elle est en cours de construction. Elles montrent aussi les concepts sollicités par les élèves pour la mettre en place.

14 - ENTRETIENS INDIVIDUELS

Fin juin 1978. CE2.

1ère partie : Problème "goûters"
(19 élèves, absent Jacques.)

Introduction

Nous voulions faire le point, en fin d'année scolaire sur les acquis conceptuels et techniques des élèves, sollicités comme outils dans un problème.

Pour avoir de l'information sur les comportements en cours de recherche, nous les avons interrogés en entretiens individuels.

Par ailleurs, nous voulions éviter les contextes de situations problématiques vécues au cours de l'année. C'est pourquoi nous avons éliminé tout recours explicite aux rectangles. Toutefois nous voulions les interroger sur un problème mettant en jeu au moins 3 cadres : un cadre de mesures, le cadre numérique, le cadre de la représentation, si possible sous ses 2 formes algébrique et graphique (représentation cartésienne ou tableau de données). D'où le choix des deux problèmes ci-après :

- Problème "goûters" et problème "cycliste".

Les entretiens ont eu lieu en classe de nature. Jacques n'y était pas (refus des parents).

14.1 - PROBLEME "GOUTERS"

. Enoncé :

Pour les goûters des enfants d'une école, on achète du pain et du chocolat. Avec 1 tablette de chocolat et 2 baguettes de pain, on fait des goûters pour 8 enfants. 3 tablettes coûtent 6 F 90, 1 baguette coûte 1 F 25.

Combien coûtent les goûters de 8 enfants, 12 enfants, 16 enfants, 20 enfants, 30 enfants, 50 enfants, 160 enfants, 280 enfants ?

. Analyse de la tâche :

C'est un problème typique de proportionnalité, que nous considérons de facon qualitative, de complexité moyenne.

En effet, il comporte plusieurs données, et aussi la nécessité de considérer simultanément 2 quantités pour en constituer une troisième :

(pain, chocolat) $\longmapsto$ goûter $\longmapsto$ prix

La relation n'est pas très simple :

à u = $\left|\begin{array}{l} 1 \text{ tablette} \\ 2 \text{ baguettes} \end{array}\right.$ $\xmapsto{f}$ 8 goûters

(Toutefois, par rapport aux recettes de cuisine, elle est simple).

Les prix,eux, sont donnés pour 3 tablettes et 1 baguette.

On s'interroge sur le prix d'un nombre varié de goûters.

L'information-clé à repérer est la relation f. Cette relation est bien linéaire par rapport à u mais u est un couple. Et dans ce couple, ce n'est pas toujours l'unité qui est intéressante à faire jouer comme voudrait le faire croire un entraînement systématique sur les fonctions linéaires.

Le problème est suffisamment complexe, d'après nous, pour que les élèves aient besoin de représentations pour organiser les données et savoir quoi chercher. Vis à vis de u, les prix intéressants à connaître sont le prix d'une tablette (on connaît celui de 3 tablettes) et le prix de 2 baguettes (on connaît le prix d'une baguette).

En cassant les éventuels conditionnements, ce problème devrait permettre de repérer si des acquis divers de l'année sont disponibles comme outils à coordonner dans un problème. Nous avons choisi de demander le prix de 8 goûters, 12 goûters

16... . Mais, la première question posée à l'élève est : veux-tu choisir un nombre d'enfants ? Nous lui proposons les nôtres seulement s'il refuse.

Matériellement, les informations lui sont fournies par écrit, tapées à la machine. On lui donne les questions si besoin est, tout de suite, de toute façon dans un deuxième temps.

Du point de vue des procédures raisonnables, on peut penser qu'elles dépendront du choix du nombre n d'enfants, en particulier de l'existence de relations numériques simples entre n et les multiples de 8. Ceci permettra d'obtenir les réponses par combinaisons linéaires simples.

De ce point de vue, une bonne maîtrise de la numération permet de toujours se trouver dans ce cas dès qu'on a choisi n. En revanche si on a une incertitude sur n, si on veut être prêt à répondre à n'importe quelle demande d'un acheteur à venir, alors il est intéressant d'avoir un programme de calcul dans lequel il n'y ait plus qu'à remplacer n par sa valeur au dernier moment. Dans ce cas, l'information intéressante à connaître est le prix d'un goûter.

14.2 - ANALYSE DES REPONSES.

Tous reconnaissent qu'il s'agit de proportionnalité, explicitement ou implicitement. Les procédures font appel parfois à des représentations, parfois ne sont que numériques.

14.2.1 - Cadre de la représentation.

Certains organisent les informations en tableaux plus ou moins allongés.

1	2	3	4	5	6
Nombre d'enfants	Nombre de tablettes	Nombre de baguettes	Prix des tablettes	Prix des baguettes	Prix des goûters

. Les tableaux comportent toutes les cases ou seulement 1, 2, 3, 6. Y recourent : Bastien, Isabelle, Valérie, Yannick.

. Certains utilisent le symbolisme algébrique en notant par une lettre la mesure inconnue. C'est le cas de Camilo, Sandrine, Grégoire, Valérie.

. Les autres se débrouillent en calculant.

14.2.2. - Cadre numérique.

. Ne calcule que par double et moitié à partir de 8 : Kamel.

. Ne manipulent que des nombres entiers et quelques petites fractions simples : Frédérique, Mathieu.

. Recourent aux fractions dans les calculs intermédiaires et manipulent les nombres à virgule sous forme de francs et centimes : tous les autres sauf Lidia.

14.3 - NOUS PRESENTONS CI-DESSOUS LE DETAIL DES TRAVAUX PAR ENFANT.

Bastien : Organise ses informations en tableau. Il calcule le prix d'une tablette de chocolat, de 2 baguettes de pain et prend comme unité de travail le prix de 8 goûters.

Il emploie une procédure scalaire par combinaison linéaire de doubles et moitiés ou par recours à la numération selon les valeurs de n.

Pour un nombre quelconque x de goûters, il propose $x \longmapsto x f(1)$ où f(1) est le prix d'un goûter.

Sa technique de calcul est efficace sur les fractions.

Camilo : Procède à peu près comme Bastien. Il symbolise les quantités inconnues. "J'ai trouvé pour le chocolat, je cherche pour le pain, je ne sais pas, je l'appelle x".

Elsa : Elle calcule le prix d'une tablette, le prix de 8 goûters, le prix d'un goûter $\frac{4,80}{8}$.

Elle choisit n = 125 et écrit :

$$\frac{125}{8} = 15 + \frac{5}{8}$$

Elle utilise avec maîtrise la numération et les fractions, le prix d'un goûter, le prix de 8 pour économiser les calculs et obtenir ce qu'elle veut.

- Pour x enfants c'est "x fois le prix de 1".

Frédérique : Elle veut le prix d'une demi-tablette et d'une baguette pour 4 enfants. C'est ce qu'elle fait.

Elle calcule plusieurs prix par combinaison linéaire à partir des prix de 4 et 8 goûters.

Elle veut le prix d'un goûter. Elle bute un moment puis elle l'obtient par divisions successives $4 \rightarrow \quad 2 \rightarrow \quad 1 \rightarrow$

Selon les nombres traités, elle recourt à des combinaisons linéaires ou au prix de 1.

- Question : Pour 53 goûters, pour 82, pour 3 500... ?

- Réponse de Frédérique : Le nombre multiplié par le prix d'un goûter.

Gilles : Il additionne le prix d'une tablette et le prix de 2 baguettes pour obtenir le prix de 8 goûters. Ceci joint à un bon usage de la numération lui donne tous les résultats recherchés.

- "J'aurais pu chercher pour un enfant".

Il calcule et dit "Maintenant je multiplie par le nombre que je veux".

Grégoire : Il symbolise $3\ T = 6,90$

$2\ T = 4,60$

Il calcule pour 8 enfants, met tout en huitièmes pour avoir le prix d 'un goûter. Il déclare que pour n goûters, c'est n x prix d'un goûter.

Hélène : Elle calcule le prix de 8 goûters et obtient les résultats voulus par combinaison linéaire.

Isabelle : Elle fait un tableau, calcule pour chaque ingrédient (pain et chocolat) le coût pour un enfant, ce qui l'oblige à manipuler des fractions. Puis, elle écrit le prix pour 10, 100... et utilise la numération. Elle s'aperçoit toutefois que pour 8 c'est facile et elle adapte, selon les valeurs de n, sa procédure de calcul.

Kamel : Il bute sur la complexité des données. Il veut le prix d'une tablette et écrit $\frac{6,90}{8}$. Il rectifie 6,90 pour 3.

Il calcule alors rapidement le prix de 8 goûters et ensuite pour différentes valeurs de n, par combinaison linéaire.

- Question : "Pour un très grand nombre de goûters ?"
- Kamel : "On cherche le prix d'un goûter."

Il écrit $\frac{4,80}{8}$ et déclare : "On multiplie par le nombre."

Laurent : Il dit : "Maman va au marché, on ajoute les prix." Il écrit : "pour une tablette $\frac{6,90}{3}$, pour une baguette $\frac{1,25}{1}$."

Il calcule le prix de 8 goûters, puis 16, $12 = 8 + \frac{1}{2}.8$

Il s'agit des questions de l'interrogateur.

Il peut faire des combinaisons linéaires simples à partir de 8, mais ne peut calculer le prix de 30 goûters. En revanche il calcule très bien le prix de 160 = 16 x 10.

Lidia : Dans un premier temps, elle calcule en suivant une idée : le prix d'une tablette $\frac{6,90}{3}$, le prix de 8 goûters 2,30 + 2,50 .

Pour 12 goûters, elle dit : "C'est 12 fois plus grand" mais elle ne sait pas dire quelle référence elle prend.

Elle dit : "12 c'est entre 8 et 16". Elle veut encadrer le prix de 12 avec ceux de 8 et de 16. Puis à nouveau, elle dérape. Elle veut le prix de 1, elle dit : "Il faut - 7". Elle revient à "Pour 1 c'est 16 fois moins."

Elle a manifestement des réminiscences de phrases ou de bouts de procédures qu'elle n'arrive pas à coordonner. Entre deux dérapages sémantiques, elle fait des calculs corrects.

Louison : Il calcule le prix d'une tablette, il calcule de tête le prix de 8 goûters en expliquant que c'est 2,30 + 2 x 1,25 .

Il calcule par combinaison linéaire et les contrôle à partir de résultats dont il est numériquement sûr. Ceci lui permet de retrouver une erreur de calcul.

Pour 50 enfants, il calcule $\frac{50}{8}$ x 2,30 + $\frac{100}{8}$ x 1,25 , et déclare que cette méthode marche pour n'importe quel nombre.

"$\frac{\text{le nombre}}{8}$ x 2,30 + $\frac{2 \text{ x nombre}}{8}$ x 1,25 ."

Marc : 1) Il choisit n = 784. Il sépare les éléments du problème. Il veut savoir combien de pain et combien de chocolat pour 784.

Il retient que les enfants sont groupés par 8, que les tablettes sont groupées par 3. Il divise

$$\begin{array}{l|l} 784 & 8 \\ \hline & 98 \;|\; 3 \\ & \quad\;\; 32 \end{array}$$

Il est ennuyé et laisse tomber cette procédure.

2) Il calcule le prix de 8 goûters, puis le prix de 12 en remarquand que $12 = 8 + \frac{1}{2}.8$ et continue ainsi par combinaison linéaire pour des cas simples vis à vis de 8.

Mathieu : Il choisit $n = 64 = 8 \times 8$

Il veut le prix d'un goûter, mais bute sur la difficulté. Il finit par le calculer par divisions successives en 2 à partir du prix de 8.

Pour le prix d'un nombre quelconque, il n'hésite pas : "C'est x fois le prix de 1".

Olivia : Elle règle la question rapidement :

"Le prix d'une tablette + le prix de 2 baguettes = le prix de 8 goûters ,

$$8 \times x = 4{,}80 \qquad x = \frac{6}{10}$$

Elle conclut : "Je sais pour 1, je sais pour tout."

Sandrine : Elle veut le prix d'une tablette, mais elle ne sait pas comment faire. Puis elle formule

$$\begin{array}{l} 1\ t \longrightarrow x \\ 2\ t \longrightarrow 2 \times x \\ 3\ t \longrightarrow 3 \times x = 6{,}90 \end{array} \qquad x = \frac{6{,}90}{3}$$

Notons qu'il s'agit d'un réinvestissement très direct de l'apprentissage.

Pour obtenir le prix de 12 goûters, elle veut le prix de 1 goûter. Elle dit : "Pour 12 enfants $12 \times x$

pour 16 enfants $16 \times x$

pour 280 enfants $280 \times x$ "

Elle bute sur le calcul de x, mais finit par s'y retrouver à partir du prix de 8 goûters par la méthode ci-dessus.

Valérie : Elle veut le prix d'une tablette, se perd un peu, puis écrit :

$$x \times 3 = 6{,}90 \qquad 6{,}90 \,\underline{|\,3}$$

Elle calcule le prix des goûters pour une grande diversité de nombres en adaptant ses combinaisons pour économiser les calculs.

- Question : "Et pour un nombre quelconque x de goûters ?"
- Réponse : "x, c'est pas un nombre"

- Question : "Et pour 2 352 ?"
- Réponse : "2 352 fois le prix d'un goûter."

Virginie : Elle bute sur la complexité des données.

Elle veut le prix d'un goûter et ne sait pas comment s'y prendre. Elle s'aperçoit qu'elle peut avoir le prix de 8 et ensuite le divise par 8 pour avoir ce qu'elle veut.

Yannick : Il fait un tableau pour organiser les données. Il choisit $n = 65$. Il est ennuyé : "C'est pas un multiple de 8".

- l'Interrogateur : "Choisis un multiple de 8"

Yannick choisit immédiatement 728 qu'il déclare être un multiple de 8 parce que "72 oui, 8 oui".

Il calcule le prix de 8 goûters, de 8×9, de 728.

Il revient à $65 = 8 \times (8 + \frac{1}{8})$ mais bloque.

14.4 - BILAN

. Pour tous, sauf Lidia, les informations pertinentes du problème sont repérées : 1 tablette, 2 baguettes, 8 goûters et les prix fournis. Les relations entre ces données sont obtenues soit directement par calcul, soit par l'intermédiaire d'une inconnue désignée (cf. Sandrine dans la recherche du prix d'une tablette).

. Tous, sauf Lidia,calculent plus ou moins rapidement ou après recherches, le prix des 8 goûters.

. Cinq élèves butent sur le calcul du prix d'un goûter alors que cela leur paraît être un élément important. Il s'agit de

- Frédérique - Kamel - Mathieu - Sandrine - Virginie.

. Trois élèves se maintiennent dans un registre numérique qu'ils peuvent contrôler :
- Marc et Yannick travaillent avec les combinaisons de multiples de 8, Laurent aussi, mais dans un registre plus simple. Pour lui, le prix de 160 goûters est plus facile à obtenir que le prix de 30 goûters (160 = 16 x 10 et 16 = 2 x 8).

. Dix élèves calculent très facilement pour des nombres très divers :
- Bastien - Camilo - Elsa - Gilles - Grégoire - Hélène - Isabelle - Louison - Olivia - Valérie.

15 - ENTRETIENS INDIVIDUELS

Fin juin 1978.

2ème partie : Problèmes "cycliste"
(19 élèves, absent Jacques)

15.1 - ENONCE ET ANALYSE DE LA TACHE

Le problème comporte 2 questions : dans la première, on étudie le mouvement d'un cycliste ; dans la 2ème question, on compare le mouvement d'un deuxième cycliste à celui du 1er. Nous présentons successivement l'énoncé et l'analyse de la tâche de chacune des questions.

15.1.1 - Première question

Un cycliste effectue un parcours en plusieurs étapes :

1ère étape	6 km	1/2 heure
	arrêt 5 minutes	
2ème étape	4 km	20 minutes
	arrêt 5 minutes	
3ème étape	12 km	3/4 heure

A-t-il toujours roulé à la même vitesse sur son parcours ?

15.1.1.1 - Ancien

On suppose que les élèves auxquels cet énoncé s'adresse ont les connaissances nécessaires quant à la mesure des longueurs en km, à la mesure des durées en heures et en minutes et la correspondance entre ces unités de temps. Ils ont aussi une certaine connaissance des fractions : 1/2, 3/4 sont des petites fractions. Ils savent accorder du sens à l'expression "rouler à la même vitesse", "régulièrement à la même vitesse" (dans le 2ème problème). Ce sens se réfère à la notion de vitesse moyenne sur un intervalle : étant donnés deux intervalles, la vitesse moyenne sur chacun d'eux est la même.

15.1.1.2 - Analyse de la tâche

Pour répondre à la question, 2 procédures sont possibles :

- une procédure par le calcul
- une procédure graphique.

Toutes deux appellent comme outil, la proportionnalité ou la notion de fonction linéaire si la référence est la notion de vitesse moyenne.

a) Procédure "calcul"

. En considérant les données de la 1ère et de la 3ème étape, on obtient la réponse :

6 km $\longmapsto$ 1/2 heure. S'il roule régulièrement, 12 km $\longmapsto$ 1 heure.
Or il parcourt 12 km en 3/4 d'heure.

Cela demande de mettre en oeuvre de la proportionnalité (scalaire):

$$d_1 \longmapsto t_1$$
$$2\,d_1 \longmapsto 2\,t_1\ ,$$

de la connaissance numérique $2 \times 1/2 = 1$ $\quad 3/4 < 1$.

Cela demande aussi d'accepter de négliger une partie de l'information donnée.

. Si l'élève répond que le cycliste roule à la même vitesse à la 1ère et à la 2ème étape, sa conception de la vitesse est la vitesse moyenne.

b) Procédure "graphique"

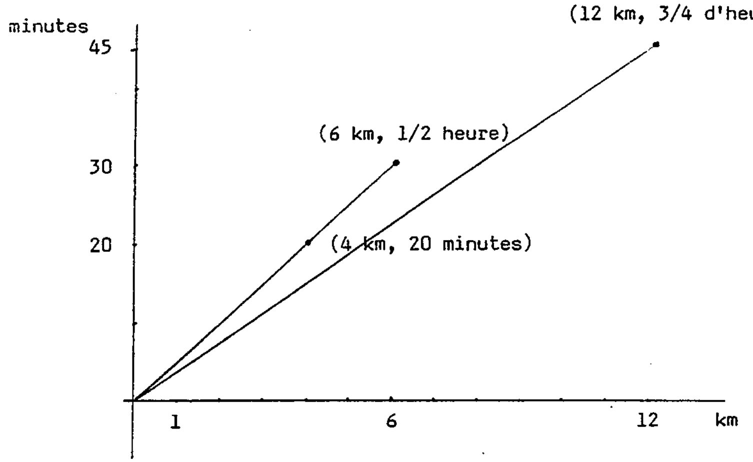
En admettant que le cycliste roule régulièrement au cours d'une étape, les données permettent de construire la représentation graphique du mouvement sur tout le parcours.

Cette construction pour exister demande au préalable qu'on ait repéré, parmi les données, 2 types de données en relation, autrement dit que les données s'organisent en couple de façon pertinente. Alors se pose le choix de la variable à porter sur chacun des axes et, compte tenu des valeurs numériques en jeu et de la place disponible pour la représentation, le choix de l'unité sur chaque axe. A ce moment là, un examen des données et une hypothèse supplémentaire (vitesse régulière au cours de chaque étape) indiquent la manière de placer et de relier les points. Le repérage des points du graphique se fait après le repérage de ses coordonnées. Si l'heure est prise pour unité de durée, il n'est pas difficile de repérer 1/2 heure. Pour repérer 3/4 d'heure, il faut savoir que $3/4 = 3 \times 1/4$ ou $1/2 + 1/4$. Pour reporter 20 minutes, il faut alors exprimer 20 minutes en heure. Soit 60 minutes $\longmapsto$ 1 h , $\quad 3 \times 20 = 60$
20 minutes $\longmapsto x$ tel que $3 \times x = 1$ $\quad x = 1/3$.
Ce calcul exige une mise en oeuvre de la proportionnalité dans un problème pas simple. La minute est une unité de temps trop petite pour le problème, u = 10 minutes est une bonne unité. La mise bout à bout des étapes est encore une tâche complexe qui combine les difficultés de la symbolisation et les difficultés numériques.

Toutefois, si la représentation graphique a été réalisée, sa lecture (ce n'est pas une droite, ni un segment de droite mais plusieurs segments de pentes différentes) est immédiate. Si on sait comment se représente un mouvement à vitesse constante (et la construction de la représentation n'est pas la manifestation d'une connaissance, sans cela) alors on a la réponse à la question cherchée.

Il y a tout lieu de penser qu'il n'y aura aucune représentation graphique de ce type. (Soulignons cependant que les élèves ont déjà travaillé en situation de communication à la production d'un graphique collectif pour l'équipe à partir de graphiques partiels provenant des différents membres de l'équipe.)

En revanche, compte tenu des connaissances des élèves et de leur pratique des graphiques, on peut penser que des représentations indépendantes du mouvement à chaque étape soient produites. Dans ce cas, on peut ne pas noter les arrêts.



Les représentations des 1ère et 2ème étapes suivent la même droite, la 3ème étape s'en distingue. La réponse est non.

Les élèves ont déjà produit ou rencontré de tels graphiques dans des occasions où ils correspondaient à la tâche demandée. Ils n'étaient pas des outils pour répondre à une question.

c) Comparaison des 2 procédures du point de vue des comportements attendus.

Dans la procédure calcul, la proportionnalité est un outil explicite mais portant sur la comparaison de 2 couples (proportionnalité scalaire). Dans la procédure graphique, il peut y avoir seulement fonctionnement implicite de la proportionnalité, mais d'une proportionnalité fonction, c'est-à-dire qu'il

faut concevoir la donnée (6 km, 1/2 heure) comme un état particulier de la fonction linéaire 6 km $\longmapsto$ 1/2 heure entièrement déterminée par une seule donnée.

Cela est un des éléments importants pris en compte dans l'apprentissage. Toutefois les notions en jeu s'élaborent pour nous sur un long terme. Nous choisissons d'en provoquer le fonctionnement dès le C E 2 mais nous n'envisageons pas un fonctionnement opératoire immédiat. Les jeux de cadres sont un des outils de la didactique à la disposition de l'enseignant pour faire évoluer les conceptions. Un autre élément de l'apprentissage est l'importance accordée à la recherche de la pertinence des données au regard du problème posé. On peut dans ce problème tester cet objectif.

15.1.2. - Deuxième question

"Un deuxième cycliste part en même temps que le premier. Il roule régulièrement toujours à la même vitesse sur tout le parcours sans s'arrêter. Il fait les 6 km de la première étape en 1/2 heure. Va-t-il arriver avant, après ou en même temps que le 1er cycliste ?"

Pour répondre à cette question, on a besoin de toutes les données de la première question.

Pour connaître la durée du parcours de 2ème cycliste, deux procédures sont possibles. Par calcul, il faut trouver x tel que

6 km $\longmapsto$ 1/2 heure
22 km $\longmapsto$ x

22 n'est pas un multiple de 6 et la procédure scalaire ne fonctionne pas de tête. La procédure graphique peut fournir x par lecture.

Pour la durée du parcours du 1er cycliste, il faut additionner des heures et des minutes. On peut prévoir un choix privilégié des minutes comme unités de temps.

15.2 - RESULTATS ET PROCEDURES

15.2.1 - Bilans globaux

Ce problème fait appel comme grandeurs à la distance, au temps, à la vitesse moyenne. Bien que le calcul numérique sollicité dans ce problème soit simple, nous allons voir qu'il est l'occasion de difficultés.

Nous avons classé les comportements des élèves en plusieurs catégories.

1) Nous avons regardé d'abord s'il y avait reconnaissance des éléments pertinents, et cela dans la 1ère et dans la 2ème question. Nous notons 1 entre parenthèses quand cela ne s'est produit qu'à la première question.

- 11 élèves repèrent les éléments pertinents et s'en servent convenablement. Ce sont :
Bastien - Camilo (1) - Elsa - Gilles (1) - Grégoire - Hélène - Isabelle (1, 2ème procédure) - Louison - Mathieu (1) - Olivia (1) - Virginie (1, en deuxième procédure après un détour graphique.)

- 2 interprètent convenablement un graphique suscité :
Valérie - Yannick

- 3 ne prennent en compte qu'une des informations, temps ou distance :
Laurent - Marc - Sandrine.

- 3 élèves bloquent : Kamel - Frédérique - Lidia

2) Du point de vue des outils sollicités, 13 reconnaissent une proportionnalité scalaire ou une proportionnalité fonction. Ils y recourent dans la 1ère question avec succès. Ce sont :
Bastien - Camilo - Elsa - Gilles - Grégoire - Hélène - Isabelle - Louison - Mathieu
Olivia - Valérie - Virginie - Yannick, ces trois derniers après changement de procédure.

Ils ne sont plus que 7 à aboutir dans la 2ème question :
Bastien - Elsa - Grégoire - Hélène - Isabelle - Louison - Valérie.

Camilo - Gilles - Mathieu butent sur la technique, ce qui est sans doute l'indice d'une complexité du problème qu'ils ne peuvent plus gérer; car, du point de vue des calculs, ils en ont fait des bien plus compliqués dans le problème-goûters.

3) Du point de vue de la représentation :

. Pour Kamel, Laurent, Lidia l'information 12 km $\longmapsto$ 3/4 h ne peut pas être traitée parce que 3/4 n'a pas de signification pour eux. Kamel les transforme en 15 minutes. Pour Laurent et Lidia, 3/4 c'est moins que 1/2.

L'interrogateur leur suggère de représenter l'unité par un trait et de représenter 1/4, 1/2, 3/4 par rapport à cette unité.

Kamel et Laurent graduent convenablement l'unité mais ne peuvent pas prendre en compte simultanément temps et distance et la représentation ne leur apporte rien.
Lidia ne représente rien.

. Valérie, Virginie, Yannick sont bloqués devant l'énoncé. L'interrogateur leur demande s'ils veulent faire un graphique. Valérie, Virginie et Yannick placent les données du 1) sur un quadrillage qu'ils graduent. Valérie relie chaque point à 0 par un trait, compare les pentes et conclut. Yannick aussi, mais après hésitation. Virginie observe ses points et conclut par calcul.

Le détour graphique a entraîné un changement de comportement vis à vis du problème, même s'il n'a pas été utilisé, comme c'est le cas pour Virginie.

15.2.2 - Détails par élève

Nous présentons le détail du travail des élèves en repérant l'outil sollicité et en notant la performance à la question.

Code Pb 1): $P_{1\ 3}$: proportionnalité scalaire sur la 1ère et la 3ème étape.

Pf : proportionnalité fonction, recherche du temps mis pour 1 km ou la distance en 5 minutes.

Pp : ne prend en compte que le temps ou que la distance.

C : calcul de la distance totale et du temps total pour le premier coureur et pour le deuxième.

Nous notons les performances + (succès), - (échec).

Bastien : + 1) $P_{1\,3}$
+ 2) C, Pf

Camilo : + 1) $P_{1\,3}$
? 2) C, Pf — Veut répondre par estimation. Ne conclut pas.

Elsa : + 1) Pf — 1ère et 2ème étape même vitesse ; 3ème étape plus vite.
+ 2) C et Pf

Frédérique : ? 1) — Après lecture du texte, ne sait rien, ne veut rien dire.
? 2)

Gilles : + 1) $P_{1\,3}$ — calculs de tête.
- 2) C, Pf — puis combinaisons linéaires, perd le fil, n'aboutit pas.

Grégoire : + 1) $P_{1\,3}$
+ 2) C — . de tête, déclare :
-"la meilleure manière c'est d'ajouter"
. fait autrement : il compare les 2 cyclistes. "l'un met 1/4 heure de plus, l'autre s'arrête 10 minutes, il va plus vite"

Hélène : + 1) $P_{1\,3}$ — calculs de tête
+ 2) — calculs de tête

Isabelle : + 1) Pf puis $P_{1\,3}$ en contrôle
+ 2) Pf — pour le 2ème cycliste. Calculs de tête pour le 1er.

Kamel : - 1) — . bute sur 3/4 h
. déclare que la 1ère et 3ème étape c'est pareil
. la signification graphique de 3/4 ne change rien.
?. 2) — non posé.

Laurent : - 1) — après signification de 3/4 par rapport à 1/2, il déclare que le cycliste va plus vite à la 1ère étape.
? 2) — non posé

Lidia : - 1) — 3/4 moins long que 1/2. Bloque.
? 2) — non posé.

Louison : + 1) $P_{1\,3}$ — et vérifie que le cycliste roule à la même vitesse à la première et à la deuxième étape.
+ 2) C — de tête, en récupérant l'information sur les vitesses repérées dans 1).

Marc : - 1) — fait des calculs corrects mais sans tenir compte de la distance.

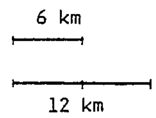
30 min. + 20 min. + 2 x 5 min. = 60 min.
↑ 1ère ét. ↑ 2ème ét. ↑ arrêt

3ème étape : 3/4 h c'est moins, il va plus vite.

Mathieu : + 1) $P_{1\,3}$
- 2) — proportionnalité scalaire pour le 2ème cycliste à partir de 6 km 1/2 h.

Olivia : + 1) Pf — $1/2 \times x = 6$
conclut : 1ère, 2ème étape, même vitesse ;
3ème étape : non.
- 2) — ne mène pas les calculs jusqu'au bout et déclare que celui qui s'arrête, va plus lentement.

Sandrine : - 1) — 3/4 h = 45 minutes, 1/2 h = 30 minutes, c'est moins. Puis $P_{1\,3}$ et un dessin de son initiative :



mais ne conclut pas.

Valérie :	+ 1)	résout après représentation graphique.
	+ 2)	utilise le graphique pour répondre : "le deuxième cycliste est sur la même droite."
Virginie :	+ 1)	après un temps de blocage, gradue convenablement son graphique, place les points (6, 30) (4, 20) (12, 45) puis après observation, écrit : $6 \longrightarrow 30$ $12 \longrightarrow 60 \neq 45$
	? 2)	non posé
Yannick :	+ 1)	ne sait pas. après un graphique, ne veut pas parler. il a placé les points (1/2, 6) (1/3, 4) (3/4, 12) puis il trace la droite passant par les deux premiers et conclut.

15.2.3 - <u>Bilan global</u>

Les comportements aux deux problèmes sont cohérents. Les résultats se recoupent. Lidia est la seule à être en échec total. Laurent, Marc, Sandrine butent sur le traitement d'une double information. Laurent et Sandrine étaient aussi gênés par la complexité de l'information dans le "problème-goûters". Frédérique et Kamel se trouvent aussi en difficulté dans les deux problèmes.

Mathieu et Virginie semblent au contraire être ralentis par une technique insuffisante en situation complexe au premier problème et répondre plus aisément à la première question du problème cycliste.

. Ainsi, nous trouvons dans un premier groupe performant du point de vue conceptuel et technique 7 enfants :
Bastien - Elsa - Grégoire - Hélène - Isabelle - Louison - Valérie.

. Un groupe où la technique est en retard sur les possibilités conceptuelles :
Camilo - Gilles - Mathieu - Olivia - Virginie - Yannick.

. Un groupe gêné par la complexité de la tâche : Marc - Laurent - Sandrine, Marc étant moins gêné du point de vue technique que Laurent et Sandrine.

. Un groupe d'élèves en difficulté des 2 points de vue, par rapport à leurs camarades : Frédérique - Kamel - Lidia.
Lidia, toutefois, est en échec total.

B - PRESENTATION DES EPREUVES ET EVALUATIONS GLOBALES ET PONCTUELLES EN 1979 ET EN 1980.

Introduction

Les épreuves que les élèves passent en 1979 et en 1980 ont pour but de tester l'évolution des conceptions et la permanence des acquis sans établir nécessairement de relation avec l'apprentissage en C M 1 et en C M 2 (que nous n'avons pas suivi avec autant de précision que dans les années précédentes). C'est pourquoi le texte porte du point de vue des contenus sur les nombres décimaux (le 12/1/1979, en juin 1979, en juin 1980) en épreuves écrites sur des problèmes de géométrie (notés T 7, R 39, R 41) impliquant des relations entre longueurs et aires en entretiens individuels en juin 1980.

Nous utiliserons aussi une épreuve écrite, conçue par un étudiant zaïrois pour une thèse de 3ème cycle, portant sur les nombres décimaux, la proportionnalité, la représentation de nombres sur une droite graduée, comme complément d'élément d'évaluation. Cette épreuve a été passée en mars 1980.

Les élèves suivis jusqu'à la fin du C M 2 sont 17 au total parmi les 20 suivis jusqu'en C M 1. En effet, Grégoire et Louison sont partis en fin de C M 1 et Isabelle a passé l'année de C M 2 à l'extérieur. Elle est toutefois revenue en juin 1980 et a passé les épreuves de cette époque.

1 - TEST ECRIT DU 12/1/1979 (C M 1)

(16 élèves, absents Frédérique, Isabelle, Jacques, Olivia)

1.1 - Enoncé

Question 1 : Comparer les nombres suivants :

0,6	0,55
12,13	12,7
14,13	14,7
112,17	112,74
112,17	112,074
350,4	350,40

Question 2 : Y a-t-il des valeurs de x telles que :

$143,15 < x < 153,16$

$140,5 < x < 140,50$

Si oui, en donner.

Question 3 : Comparer les nombres suivants :

a) $0,3 \times 0,3$ 0,9
$0,3 \times 0,3$ 0,3

b) $1,3 \times 1,3$ 1,3
$1,3 \times 1,3$ 1,9

c) $10,2 \times 10,2$ 100
$10,2 \times 10,2$ 100,4
$10,2 \times 10,2$ 100,04
$10,2 \times 10,2$ 102

Question 4 : Donner à x des valeurs telles que

$10,2 \times x < 102$

Les trouver toutes.

Question 5 : Donner à x des valeurs telles que

$10,2 \times x < 51$

Les trouver toutes. Y en a-t-il beaucoup ?

1.2 - Analyse de la tâche - objectif du test.

Dans les trois premières questions, il s'agit de tester les connaissances des élèves

- du point de vue algorithmique,

dans une tâche de comparaison de couples de nombres (1ère question)

- du point de vue topologique (2ème question),

dans 2 cas : . les bornes de l'intervalle sont distinctes.

. les bornes sont confondues mais désignées par deux écritures décimales distinctes.

- d'un point de vue qui combine les deux précédents.

On complexifie la première tâche en exprimant l'un des termes de la comparaison non pas sous une forme réduite mais sous forme de produit de deux nombres.

Pour répondre à ces questions, trois attitudes sont possibles :

- Céder au piège tendu par la simplicité de l'écriture et révéler le fonctionnement d'un modèle primitif "couple d'entiers".

- Utiliser la compatibilité de l'ordre et de la multiplication, la transitivité de l'ordre.

- Calculer les produits.Comparer le résultat à l'autre nombre.

Dans les questions 4 et 5, il s'agit de repérer leur attitude face à un problème qui met en jeu implicitement des notions topologiques plus élaborées : celles d'intervalle ouvert, de borne supérieure non atteinte, et ceci à travers une formulation qui pourrait porter la marque du "discret" - "les trouver toutes".

Enfin tester la disponibilité de la proportionnalité scalaire dans une tâche simple sur le plan numérique, mais rendue complexe par son intervention dans un problème comportant des inégalités.

1.3 - Résultats

1.3.1 - Codage des réponses

. Pour la première question, nous comptons le nombre d'erreurs.

. Nous groupons les réponses à 2 a) de la manière suivante :

R_o : Copie du texte.

R_1 : Des exemples justes de la forme n,16 ou n,15 où n = 143 ou 153 respectivement ou encore successivement la liste 144,15 ; 145,15 ; ... ; 153,15 complète ou partielle.

R_2 : Des exemples génériques justes en général perturbés par un ou deux faux.

R_3 : Un ou des exemples génériques justes.

. La question 2 b) n'est pas discriminante, tous répondent que 140,5 = 140,50 et qu'il n'y a aucun nombre entre les deux.

. Pour la question 3) nous formons deux catégories de réponses : celles obtenues sans calcul, celles obtenues après calculs, et nous repérons dans chacune les justes et les fausses. Nous classons les réponses comme fausses dès qu'une des réponses du groupe est fausse (2 en 3a, 2 en 3b, 4 en 3c)

. Nous regroupons les réponses aux questions 4 et 5. Tous ont fait la relation entre 102 et 51.

Nous donnons le détail des réponses par élève.

1.3.2 - Réponses

- Question 1 : nombre d'erreurs n

n = 0		n = 1	n > 1
Camilo	Marc	Bastien	Lidia
Elsa	Valérie	Gilles	Mathieu
Grégoire	Virginie	Hélène	
Kamel	Yannick	Laurent	
Louison		Sandrine	
9 élèves sur 16		5 élèves sur 16	2 élèves sur 16

- Question 2

R_0	R_1		R_2	R_3
Lidia	Kamel	Sandrine	Bastien	Camilo
	Laurent	Valérie	Gilles	Elsa
	Marc	Virginie		Grégoire
	Mathieu	Yannick		Louison
				Hélène
1 élève sur 16	8 élèves sur 16		2 élèves sur 16	5 élèves sur 16

- Question 3 (18 élèves, les 16 + Isabelle, Olivia)

3 a)

sans calcul écrit			avec calculs écrits	
juste	faux		juste	faux
Elsa	Bastien	Laurent	Grégoire	Lidia
Louison	Camilo	Marc	Kamel	Olivia
Valérie	Gilles	Mathieu	Isabelle	Virginie
	Hélène	Sandrine		
	Yannick			
3 élèves sur 18	9 élèves sur 18		3 élèves sur 18	3 élèves sur 18

Tous ceux qui ont une réponse erronée sans calcul ont écrit 0,3 x 0,3 = 0,9.

Parmi ceux là, un seul a écrit 1,3 x 1,3 = 1,9.

Virginie a fait un calcul juste et fournit une réponse fausse. Ce pourrait être une mauvaise manipulation du signe.

3 b)

sans calcul écrit			avec calculs écrits		
juste	faux		juste		faux
Grégoire	Camilo	Sandrine	Bastien	Isabelle	Lidia
	Laurent	Virginie	Elsa	Kamel	Marc
	Mathieu	Yannick	Gilles	Louison	Valérie
			Hélène	Olivia	
1 élève sur 18	6 élèves sur 18		8 élèves sur 18		3 élèves sur 18

Marc fait un calcul juste.

3 c)

sans calcul écrit		avec calculs écrits		
juste	faux	juste		faux
Camilo	Mathieu	Gilles	Sandrine	Bastien
Elsa		Isabelle	Valérie	Kamel
Grégoire		Louison	Virginie	Lidia
Hélène		Marc	Yannick	Olivia
Laurent				
5 élèves sur 18	1 élève sur 18	8 élèves sur 18		4 élèves sur 18

. Kamel calcule correctement, reporte 100,04 et donne des réponses cohérentes avec ce résultat.

. Mathieu écrit 10,2 x 10,2 = 100,4. Les autres réponses sont cohérentes avec ce résultat.

. Bastien et Lidia donnent des réponses non compatibles avec la transitivité de l'ordre.

1.3.3 - Détail des réponses aux questions 4 et 5.

Bastien : "Je peux aller jusqu'à 9, jusqu'à 4" et écrit 9,2 8,2

Camilo : " /infini " mais énumère les entiers de 1 à 9 pour l'une, de 1 à 4 pour l'autre, précise "je n'ai pas fait de calculs".

Elsa : Des exemples entiers, des décimaux génériques et une phrase : "c'est facile, il ne fallait pas dépasser x = 9 ou 9,2 ..." "Pour 51 , il ne fallait pas dépasser x = 4 ou 4,1..."

Grégoire : "En dessous de 10, en dessous de 5".

Gilles : Donne des exemples, précise qu'il y a beaucoup de nombres et ajoute :
"Il faut pas que x ne dépasse pas 9,9; 9,99; 9,999"
"Il faut pas que x ne dépasse pas 4,9; 4,99; 4,999".

Hélène : "On peut faire tous les nombres que l'on veut < que 10"
"On peut faire tous les nombres que l'on veut < 5.
C'est très facile pour le 51 puisque c'est le 1/2 de 102."

Kamel : "Je peux aller jusqu'à 9", mais un des exemples est 9,2.
"Je peux aller jusqu'à 4", et là les 2 exemples sont 3,2 et 3,5.

Laurent : "tous les nombres en dessous de 10"
"tous les nombres en dessous de 5"
et confirme sa référence aux entiers en énumérant - 1,2,3,4,5,6,7,8,9
- 2,3,4

Lidia : Donne comme exemples 9,2 x 10
8,2 x 10
7,2 x 10
6,2 x 10

Louison : 4) $x < 10$ 5) $x < 5$
10,2 x x 51 x 2 = 102 effacé mais on en voit la trace.
puis 102/2 = 51 10/2 = 5

Marc : Donne des exemples entiers et 6 + 1/10, 7 + 3/100
"Tous les nombres en dessous de 10"
" Tous les nombres en dessous de 5"

Mathieu : x peut aller jusqu'à 10 = 102
x jusqu'à 9.
x peut aller jusqu'à 5 = 51

Sandrine : "Il faut multiplier par 10"
A la question - les trouver toutes - elle répond "non" "jusqu'à 5"

Valérie : Calcule les valeurs de 10,2 x x pour x = 1, ..., 9 entiers, idem pour l'autre exercice
N° 4 "On peut trouver des nombres en dessous de 10 car 10,2 x 10 = 102 c'est trop grand"
N° 5 "51 c'est la moitié de 102, donc pour N° 4 on devait aller en dessous de 10 et 10/2 = 5. Donc toutes les valeurs on doit les trouver en dessous de 5".

Virginie : "Il y en a une infinité, tous les nombres vont sauf ceux de plus que 10, mais 10 ne marche pas."
Même réponse formulée dans les mêmes termes pour l'autre question : avec 5.

Yannick : "C'est 9 fois 10,2 pour avoir plus petit que 102, tous les nombres jusqu'à 10 mais pas 10". "Tous les nombres jusqu'à 5, mais pas 5"
"51 est la moitié de 102."

1.4 - BILAN

Certains élèves disposent d'un bon modèle des nombres décimaux qui résiste plus ou moins bien au piège ou à la difficulté. Pour d'autres, la référence aux entiers est encore forte.

. Modèle résistant : Elsa, Grégoire, Louison.

. Le modèle "couple d'entiers" réapparaît seulement en 3 a): Bastien - Camilo - Gilles - Hélène.

. La référence aux entiers apparaît en question 2 et confirmée en question 3 (sauf pour Kamel qui calcule)-avec par ailleurs une bonne technique : Kamel - Marc - Valérie - Virginie - Yannick

-avec une technique moins bonne : Laurent - Mathieu - Sandrine.

. Lidia est en échec total.

Nous n'avons pas classé Isabelle et Olivia qui n'ont répondu qu'à une seule question et par calcul. Toutefois notons que les calculs sont justes chez Isabelle et faux 2 fois sur 3 chez Olivia.

Les réponses aux questions 4 et 5 sont finalement difficiles à interpréter. La majorité des élèves expriment que 10 (resp 5) est une borne non atteinte. Mais en dehors de Gilles (4,9 ; 4,99 ; 4,999), aucun ne suggère par sa formulation qu'on peut se rapprocher autant qu'on veut de la borne. Pour plusieurs élèves, le référentiel suggéré par le choix des exemples numériques est plus restreint que celui sur lequel semble porter le langage et du coup restreint la portée des déclarations des autres.

2 - TEST DE JUIN 1979 (17 élèves, absent Jacques, partis Grégoire, Louison)

2.1 - Enoncé

- Question 1)
  . Calculer $132{,}4037 + 795{,}84$
  $2004{,}3 - 57{,}0375$
  $27{,}364 \times 12{,}0103$
- Question 2).
  . Y a-t-il un nombre x tel que
  $13{,}5679 < x < 13{,}568$
  Justifier la réponse.

2.2 - Analyse de la tâche

L'addition devrait être réussie par tous. La tâche dans la soustraction est rendue complexe par la présence de zéros dans l'écriture des nombres. C'est aussi ce qui va compliquer la multiplication. Toutefois les multiplications élémentaires ne produisent pas de zéros à la fin de l'écriture du résultat.

On peut répondre à la deuxième question, soit en se référant à un algorithme sur l'écriture des nombres qui permet de se raccrocher aux entiers, soit en se référant à la signification de l'écriture en termes de fractions décimales.

2.3 - Résultats

- Question 1

. Addition : 16 justes sur 17, Frédérique commet une erreur de retenue.

. Soustraction : 10 justes sur 17. Ce sont :
Elsa - Isabelle - Kamel - Laurent - Marc - Olivia - Sandrine - Valérie - Virginie - Yannick.

Erreurs : . 4 élèves commettent des erreurs de retenue. Ce sont :
Bastien - Frédérique - Gilles - Hélène.

. Camilo donne un résultat correct pour 57,375 au lieu de 57,0375.

. Mathieu soustrait séparément parties entières et parties décimales en deux opérations distinctes : celle concernant les parties entières est fausse, l'autre est transformée en 0,3 - 0,375.

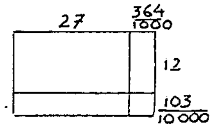
. Lidia aligne les parties entières en partant de la gauche et en ignorant la position de la virgule. Elle pose un zéro et écrit 2004,30 pour 2004,3 de manière à avoir 6 chiffres aux deux nombres. Puis elle effectue la soustraction 200430 - 570375 conformément à la règle (y compris les retenues) tant qu'elle peut et laisse en blanc, quand elle arrive au 5 de gauche.

. Multiplication : 7 justes sur 17. Ce sont :
Bastien - Elsa - Gilles - Hélène - Isabelle - Marc - Virginie.

Contrôles de l'opération :

. Gilles après l'avoir posée sous forme standard et s'être aperçu qu'elle était fausse, l'a posée en tableau.

. Camilo et Valérie font une estimation du résultat à l'aide des parties entières et sont convaincus que leur opération est fausse. Camilo la pose alors en tableau et reporte mal une retenue d'addition. Valérie dessine un rectangle et explique la multiplication comme aire du rectangle :



Malheureusement en reportant ses opérations élémentaires, elle reprend deux fois le même nombre et trouve un résultat erroné.

. Laurent fait la preuve par 9. Elle est juste par hasard.

. Mathieu fait aussi la preuve par 9, elle est fausse à une unité près. Il corrige arbitrairement son opération d'une unité et la preuve est correcte.

. On repère 8 erreurs de décalage. Elles sont faites par Camilo - Frédérique - Kamel - Laurent - Olivia - Sandrine - Valérie - Yannick.

. Lidia ne fait rien.

- Question 2

. Lidia recopie le texte.

. 6 élèves (peut-être pris par le temps et la longueur de la multiplication) ne répondent pas :
Camilo - Isabelle - Kamel - Marc - Olivia - Sandrine.

. Gilles énumère des exemples extérieurs à l'intervalle. Virginie aussi en premier lieu, mais ils sont rectifiés.

. Laurent énumère les nombres obtenus en remplaçant dans 13,5679. le point successivement par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

. Valérie donne les mêmes exemples mais en désordre.

. Frédérique pose la soustraction 13,5680 - 13,5679, trouve "1 de différence", "déclare que" entre 0 et 1 il y a 1/2, 1/3, 1/4, ..." Elle choisit 1/4 et donne comme exemple $13,5679\frac{1}{4}$. La réponse est ambiguë car on ne sait pas ce que représente pour elle "1 de différence".

. Mathieu, Yannick fournissent plusieurs exemples justes en faisant varier la longueur de la partie décimale. Hélène aussi, après avoir précisé que la différence des nombres était 0,0001.

. Nous présentons ci-dessous la réponse d'Elsa et celle de Bastien.

Réponse d'Elsa

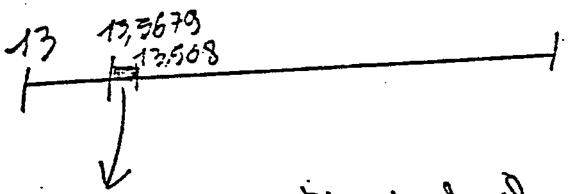
② Y a-t-il un nombre x tel que

13,5679 < x < 13,568

Oui il y en a beaucoup car derrière le 7 et le 9 de 13,5679 nous pouvons ajouter tous les chiffres que l'on veut du moment que tous les chiffres qui sont derrière le 7 et le 9 n'~~arriveron~~ arriveront jamais à donner un résultat de 8 millièmes

exemples : 13,56791286809 ; 13,567908060904.

Réponse de Bastien



dans ce petit rectangle. Il y a des millions de x :

13,56791
13,56792
93
94
95
96 etc...

2.4 - BILAN

Hormis Lidia qui échoue à toutes les questions (sauf à l'addition où ses difficultés de numération n'ont pas d'incidence), 13 élèves font deux opérations justes sur trois ; Frédérique commet des erreurs à chaque opération. Toutefois du point de vue des nombres, elle met en oeuvre deux idées héritées de l'apprentissage : a) Si deux nombres sont différents, il y a entre eux une différence qu'on doit pouvoir calculer. b) Entre 0 et 1 il y a beaucoup de nombres, en particulier ceux de la forme 1/n.

Bastien et Elsa expriment de façon remarquablement claire leur conception de la densité des nombres, géométrique pour Bastien, numérique pour Elsa.

Pour Laurent, la conception des nombres décimaux est toujours celle héritée des entiers. Il semble n'avoir pas renoncé au désir de fournir à tout nombre un successeur.

Nous regroupons les résultats en rapprochant les performances techniques et les conceptions numériques.

	+	-	x	conceptions de la densité
Elsa	j	j	j	numérique en référence aux fractions.
Isabelle	j	j	j	?
Marc	j	j	j	?
Virginie	j	j	j	exemples génériques (après correction)
Bastien	j	f	j	géométrique
Gilles	j	f	j	exemples extérieurs à l'intervalle.
Hélène	j	f	j	exemples génériques + algorithme pour en trouver.
Kamel	j	j	f	?
Laurent	j	j	f	pointilliste
Olivia	j	j	f	?
Sandrine	j	j	f	?
Valérie	j	j	f	pointilliste en évolution
Yannick	j	j	f	exemples génériques
Camilo	j	f	f	?
Lidia	j	f	f	-
Mathieu	j	f	f	exemples génériques
Frédérique	f	f	f	algorithme rattaché aux entiers et aux nombres compris entre 0 et 1.

3 - EPREUVES DE MARS 1980
(16 élèves, absente Sandrine)

3.1 - Enoncé et analyse de la tâche

Les premières questions du test portent sur l'écriture des nombres. Il est clair pour tous qu'un nombre peut avoir plusieurs types d'écritures, qu'un nombre entier peut s'écrire sous forme fractionnaire ou décimale, qu'un nombre décimal non entier peut avoir plusieurs écritures fractionnaires... Nous retenons comme élément d'évolution les questions 6,7,8,11,12,13,14.

. Question 6 :

Ordonner les nombres suivants du plus petit au plus grand :
0,5 ; 0,05 ; 0,005 ; 0;505 ; 0,500 ; 0,50 ; 0,055.

Les nombres étant fabriqués uniquement avec des 0 et des 5, il est indispensable de donner de la signification à la position de chacun dans l'écriture du nombre.

. Questions 7 et 8 :

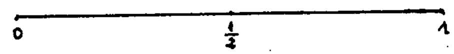
- Additionner 14,231 et 0,279 puis 13,428 et 33,6.
- Multiplier 12,45 par 0,01 puis 67,6 par 2,5.

11. Coche la bonne affirmation:

Entre... et ...	il n'y a aucun nombre décimal	il y a un seul nombre décimal	il y a plusieurs décimaux
1 et 2			
1,1 et 1,12			
22 et 22,1			

En exhiber un dans le cas où il y en a.

12. On représente un segment de longueur 1 comme ci-dessous. Sur ce segment je peux placer le nombre $\frac{1}{2}$ et d'autres nombres décimaux compris entre 0 et 1. A toi de placer 0,2 et $\frac{3}{8}$.



13. Trouve, sans dessiner, 3 rectangles de même aire A = 3,70 cm^2 et de largeurs au plus égales à 1,5 cm.

Réponse:

1er rectangle largeur: longueur:

2ème rectangle largeur: longueur:

3ème rectangle largeur: longueur:

14. Un libraire a reçu des paquets de feuilles de papier. Il doit classer ces paquets selon l'épaisseur des papiers, du moins épais au plus épais.
Sur chaque paquet figure l'une des indications suivantes:

A: épaisseur 180 mm pour 150 feuilles
B: épaisseur 180 mm pour 120 feuilles
C: épaisseur 793 mm pour 650 feuilles

Souligne le bon classement et explique ton procédé:

1) A B C
2) A C B
3) B A C
4) B C A
5) C A B
6) C B A

Procédé:

Nous rapprochons les réponses à la question 11 des réponses aux tests de janvier et juin 1979 à des questions analogues.

La question 12 nous intéresse dans la mesure où la graduation d'une droite a été un élément important dans l'apprentissage.

La question 13 reflète aussi une situation beaucoup travaillée.

La question 14 demande comme outil la proportionnalité et la division. Notons que le codage des réponses peut n'être pas compris.

3.2 - Résultats

. Question 6 : .ordre correct pour
Bastien - Camilo - Elsa - Frédérique - Gilles - Hélène - Kamel - Mathieu - Virginie.

. Question 7 : Tous additionnent correctement.

. Question 8 : .Juste pour
Bastien - Camilo - Elsa - Gilles - Hélène - Kamel - Marc - Olivia - Valérie - Virginie - Yannick.

.Une erreur de retenue : Frédérique
de virgule : Laurent - Lidia.
.Oublie d'additionner : Mathieu
.Erreurs diverses : Jacques

. Question 11 : .Pas de nombres décimaux entre 22 et 22,1 :
Frédérique - Hélène - Jacques - Laurent - Marc - Mathieu.
.Il y en a plusieurs (exemples fournis)
Bastien - Camilo - Elsa - Gilles - Kamel - Olivia - Valérie - Virginie
.Lidia écrit des nombres en dehors de l'intervalle proposé.

. Question 12 :

3) La double graduation, en cinquièmes et en huitièmes est indiquée par des points sur le segment [0,1/2] , chez Hélène et Olivia, soutenue de plus par la graduation numérique sur [0,1] chez Elsa.

2) Le point 1/4 est repéré au milieu entre 0 et 1/2, mais non noté numériquement. Le point noté 0,2 est placé un peu avant 1/4 ; 3/8 est noté au milieu entre 1/4 et 1/2 chez Kamel - Marc - Virginie.

Gilles a marqué par des points les cinquièmes entre 0 et 1/2 et a convenablement placé 0,2 seulement. La position des points 0,2 et 3/8 est convenable de part et d'autre du point 1/4 imaginé chez Bastien, Camilo et Mathieu.

1) L'estimation est plus floue chez Laurent, Valérie et Yannick. On peut dire que seul l'ordre est respecté.

Frédérique ne place que 0,2.

0) Jacques place 0,2 entre 0 et 1/2 mais 3/8 entre 1/2 et 1.

. Question 13 :

. Proposent des mesures répondant à la question :
Bastien - Camilo - Elsa - Gilles - Hélène - Marc - Mathieu - Olivia - Valérie - Yannick - Virginie.

. Kamel et Laurent proposent des nombres dont le produit n'est pas 3,7 , mais n'en n'est pas très loin pour un ou deux exemples.

. Lidia choisit 1,2 , pose la division $3{,}7 \,\underline{|\,1{,}2}$ et ne donne pas de réponse.

. Frédérique ne sait pas faire.

. Question 14 : Proposent un ordre correct :
Bastien - Camilo - Elsa - Gilles - Kamel - Olivia - Virginie - Yannick.

a) Procédures menant à la réussite :

- division systématique : Bastien - Camilo - Gilles - Kamel - Olivia - Virginie Yannick.
- deux divisions : Elsa.

b) Recopie le texte : Laurent
Ne comprend pas la question : Frédérique - Jacques

c) Erreurs provenant d'une mauvaise utilisation des quotients par défaut : Marc - Mathieu.

Le classement noté est incorrect mais ne semble pas répondre au discours au moins pour les paquets de même épaisseur : Hélène - Valérie.

Pour une même épaisseur (180 mm), s'il y a moins de feuilles, chacune est moins épaisse : Lidia.

3.3 - Bilan des réponses aux diverses questions
(voir page suivante)

Remarque : nous nous attendions à une meilleure performance à la question 6 (ordonner des nombres décimaux). Il est vraisemblable qu'une difficulté purement visuelle (seulement des 0 et des 5 dans l'écriture des nombres) ait produit un effet parasite (cf. la bonne performance à une épreuve analogue, techniquement plus difficile en Juin 80).

. Bilan des réponses aux diverses questions

	6	7-8	11	12	13	14
Bastien	x	x	x	2)	x	x
Camilo	x	x	x	2)	x	x
Elsa	x	x	x	3)	x	x
Frédérique	x	addition	-	1)	-	-
Gilles	x	x	x	2)	x	x
Hélène	x	x	-	3)	x	/
Kamel	x	x	x	2)	/	x
Jacques	-	addition	-	0)	-	-
Laurent	-	addition	-	1)	-	-
Lidia	-	addition	-	-	-	-
Marc	-	x	-	2)	x	/
Mathieu	x	-	-	2)	x	/
Olivia	-	x	x	3)	x	x
Valérie	-	x	x	1)	x	/
Virginie	x	x	x	2)	x	x
Yannick	-	x	x	1)	x	x

x correctement traitées
/ partiellement traitées
- faux ou non fait
Le numéro dans la colonne 12 renvoie au mode de représentation des nombres décrit pour répondre à la question 12.

Cette épreuve comporte des questions de nature diverse :
- plutôt technique pour 6 - 7 - 8
- plutôt conceptuelle pour 11 - 13 - 14
- de représentation pour 12

On note cependant une remarquable cohérence dans les réponses.

. Un groupe performant

Bastien - Camilo - Elsa - Gilles - Virginie

. Un groupe en échec

Jacques - Laurent - Lidia

. 10 élèves sur 16 placent convenablement sur l'axe gradué les nombres proposés.

Pour ceux-là, il n'y a pas de déséquilibre marqué au regard des épreuves proposées entre les compétences techniques et les appuis conceptuels.
Hélène - Kamel - Olivia sont plutôt "bons",
Marc - Mathieu "moins bons."

. Parmi les 6 en échec du point de vue de la représentation des nombres, 2 réussissent plutôt bien les autres questions avec une défaillance technique en 6. Les 4 autres échouent partout (Lidia - Laurent - Jacques) ou presque partout (Frédérique).

4 - TEST ECRIT JUIN 1980

18 élèves (Isabelle est revenue)

4.1 - Enoncé

. Question 1 Compare les nombres a et b

	a	b
-	74,378	73,9
-	74,39	75,29
-	75	74,4
-	74,3807	74,378002
-	74,30708	74,308

. Question 2 Ordonne les nombres suivants

75,02 ; 74,378 ; 73,9 ; 74,4 ; 74,3807 ; 75 ; 74,5 ;
74,3078 ; 74,378002 ; 75,012 ;
du plus petit au plus grand.

. Question 3 Coche la bonne affirmation

entre ... et...	il n'y a aucun nombre	il y a un nombre	il y a plusieurs nombres	Exemples
74 et 75				
74,01 et 74,012				
74,39 et 74,4				

4.2 - Analyse de la tâche :

Le test comporte deux types de tâches déjà proposées en janvier-juin 79 et en mars 80.

4.2.1 - Ordonner des nombres décimaux.

La tâche se présente sous 2 formes :

- une forme simple : comparer deux nombres (exercice 1)
- une forme plus complexe : ordonner une suite de 10 nombres dont la partie décimale a une longueur variable (de 0 à 6 chiffres) (exercice 2)

Nous pensons que les erreurs dans le 2ème exercice peuvent révéler des conceptions primitives qui dictent encore les décisions. Nous pensons essentiellement à la règle (RE) qui consiste à ordonner les écritures a, b comme s'il s'agissait de couples d'entiers. Nous pourrions observer un décalage pou un même élève entre les performances aux questions 1 et 2.

4.2.2 - Y a-t-il un nombre entre 2 nombres donnés.

Cette tâche est décomposée en deux sous-tâches :

- l'une est relative à l'existence de tels nombres
- l'autre est relative à la production de tels nombres.

Nous rapprocherons les réponses aux deux exercices pour nous en servir encore comme indice révélateur des conceptions.

Les nombres ont été choisis dans trois registres numériques différents :

. 2 entiers consécutifs 74 et 75

. 2 décimaux 74,01 et 74,012 pour lesquels il est possible de fournir une bonne réponse conforme à la règle (RE) mais affinée (on attend 74,011)

. 2 décimaux 74,39 et 74,4 qu'il faut plonger dans une catégorie plus large si on veut répondre. Les élèves savent bien que de tels nombres existent : ils en ont classé toute une suite en question 2.

4.2.3 - Nous avons proposé ce test d'une part aux élèves du C M 2, d'autre part à un C M 2 de Sceaux, dans une classe de 27 élèves.

Signalons que nous avons précisé pour la tâche 2 à Sceaux qu'on cherchait des nombres "entre deux autres"en précisant le sens de l'expression "plus grand que l'un, plus petit que l'autre" parmi tous ceux qu'on connaissait "les décimaux, les fractions", de façon à éliminer dans l'interprétation des réponses une ambiguïté due au référentiel.

4.2.4 - <u>Analyse des productions</u>

Nous faisons un tableau des réponses par exercice.

- Pour la tâche 1, sous sa forme simple, nous classons selon les réussites-échecs en comptant les erreurs.

	juste	1 erreur	>1 erreur
C M 2	12 sur 18	3 sur 18	3 sur 18
Sceaux	21 sur 27	4 sur 27	2 sur 27

parmi nos élèves : Frédérique - Gilles - Laurent ont commis une erreur.
Sandrine - Lidia ont commis deux erreurs
Virginie semble avoir inversé les signes < et > .
Les 12 autres répondent correctement.

Notons que les résultats à ce ler exercice sont plutôt meilleurs à Sceaux.

- Pour la tâche 1, sous sa forme complexe, nous classons les échecs selon les procédures apparemment mises à l'oeuvre ; nous en repérons deux : (RE) déjà décrite en 4.2.1 et une recherche (RC) de réduction de la complexité. En effet les nombres semblent correctement classés par paquets. Et enfin les dérapages divers.

	justes	(RE)	(RC)	dérapages
C M 2	14 sur 18	3 sur 18	1 sur 18	0
Sceaux	9 sur 27	12 sur 27	4	3

La comparaison de ces 2 tableaux met en évidence la fragilité à Sceaux du fonctionnement de l'algorithme de comparaison à l'oeuvre dans la forme simple. L'introduction d'un facteur de complexité fait chuter les résultats à Sceaux de 21 à 9 pris dans les 21 et plutôt monter en C M 2, comme si le premier exercice avait servi d'échauffement. La règle (RE) explique 11 échecs à Sceaux presque tous parmi les 21.

Etudions plus en détail les réponses du C M 2.

. 1 élève réussit l'exercice 1 et répond selon la règle (RE) au 2ème exercice. Autrement dit 1 élève a un comportement analogue aux 11 de Sceaux.

. 2 élèves ont commis une erreur à l'exercice 1 mais ordonnent correctement la suite.

. Virginie ordonne correctement toute la suite.

juste		RE	RC
Bastien	Kamel	Jacques (j)	
Camilo	Marc	Lidia (2e)	Laurent (1)
Elsa	Mathieu	Sandrine (2)	
Frédérique (1)	Olivia		
Gilles (1)	Valérie	entre parenthèses, le nombre d'erreurs à l'exercice 1.	
Hélène	Virginie (4)		
Isabelle	Yannick		

- A la tâche 2, nous classons les réponses selon 4 critères, en séparant les réponses pour chaque couple de nombres proposés .

Code des réponses:

R_o "aucun nombre"

R_1 "un seul nombre" (74,011 pour répondre en b)) ou "plusieurs nombres" avec exemples conformes à la règle (RE).

R_2 "plusieurs nombres" avec exemples incorrects ou un exemple répété sous deux écritures.

R_3 "plusieurs nombres" avec exemples corrects.

a) entre 74 et 75

	R_o ou R_2	R_3	
CM 2	0	18	sur 18
Sceaux	25	2	sur 27

b) entre 74,01 et 74,012

	R_o	R_1	R_2	R_3	
CM 2 18 élèves		Frédérique Jacques Laurent Lidia Virginie	Gilles Kamel Marc Sandrine Valérie	Bastien Elsa Isabelle Olivia	Camilo Hélène Mathieu Yannick
	0	5	5	8	
Sceaux 27 élèves	15	12	0	0	

c) entre 74,39 et 74,4

	R_o	R_1	R_2	R_3		
CM 2	Frédérique Laurent Lidia Virginie		Gilles Jacques Sandrine	Bastien Hélène Marc Valérie	Camilo Isabelle Mathieu Yannick	Elsa Kamel Olivia
	4	0	3	11		
Sceaux	23	0	4	0		

La réponse R_o en c) est conforme à la règle (RE) et s'apparente à R_1 pour b), ce qui est cohérent avec les résultats.

4.3. BILAN

A la question 3, dans les deux derniers registres de nombre la différence entre le CM 2 suivi et celui de Sceaux est flagrante. Nous y voyons la manifestation de l'apprentissage.

Le point de vue topologique des nombres est complètement absent à Sceaux, alors que la technique de comparaison semble au point. (cf. question 1)*

Du point de vue de la signification de l'écriture décimale et de la densité des nombres décimaux, nous estimons avoir atteint nos objectifs d'apprentissage pour tous les élèves en R_3, soit 11 sur 18. Frédérique et Virginie d'une part, Gilles d'autre part, semblent n'avoir maîtrisé qu'un des deux aspects cités ci-dessus. En effet, les deux premières disposent d'un bon algorithme de comparaison des nombres qui leur permet d'ordonner des nombres "fournis", mais leur modèle de nombre est encore celui des entiers. Gilles au contraire dispose du bon modèle, mais il semble buter sur l'algorithme d'écriture (ses exemples comportent plusieurs 0 dans la partie décimale tout de suite après la virgule).

Récapitulons ; nous comptons

11 élèves performants : Bastien, Camilo, Elsa, Hélèbe, Isabelle, Kamel, Marc Mathieu, Olivia, Valérie, Yannick

avec des différences entre eux que nous avons décrites.

3 sont en déséquilibre : Frédérique, Gilles, Virginie

4 sont en échec : Jacques, Laurent, Lidia, Sandrine.

* En fait, elle ne l'est pas vraiment puisqu'elle résiste mal à une complexification de la tâche (cf. question 2)

5 - ENTRETIENS INDIVIDUELS

Problème T 7 - Juin 1980

(15 élèves, absentes Frédérique et Lidia)

5.1 - Enoncé

Nous avons posé, en juin 1980, en entretiens individuels, à 15 élèves du C M 2 que nous suivons et à 28 élèves du lycée Lakanal en juin 1981, les problèmes suivants :

I - Voici un cercle. On a marqué 2 points A et B. Choisis un troisième point C sur ce cercle. En joignant ces points tu obtiens un triangle A B C qui a une certaine aire.

a) Peux-tu placer le point C de façon que l'aire soit la plus grande possible ?

. Pourquoi choisis-tu ce point ?

b) Calcule l'aire de ce triangle.

c) Parmi les triangles que tu peux construire, y en a-t-il un dont l'aire soit de 7 cm^2 ?

Les questions sont posées pour 2 cas de figure : A B horizontal, A B oblique.

II - On s'intéresse à un triangle A B C d'aire 7 cm^2 ?

. Peux-tu donner une mesure en cm de la hauteur passant par C ?

. Peux-tu donner un encadrement de cette mesure (avec des nombres décimaux) ?

. Peux-tu en donner un meilleur ?

A B = 4,6 cm sur le dessin.

Note : Lidia a été interrogée sur le problème I, les difficultés ont été telles qu'on ne lui a pas posé le problème II.

5.2 - Analyse de la tâche

Problème I :

Il est exprimé dans le cadre géométrique mais la question porte sur l'existence d'un maximum.

a) Pour y répondre, il faut d'abord repérer les éléments fixes (A, B, le cercle) et les éléments variables pertinents pour la question posée : au moins le point C et l'aire du triangle A B C, et rechercher un mode de variation de l'aire du triangle en fonction de la position du point.

En fait les élèves n'ont pas les outils mathématiques pour répondre à la question, mais ils peuvent établir des relations intéressantes entre quantités variables.

b) le calcul de l'aire demande de connaître deux mesures : par exemple, celle de A B et celle de la hauteur passant par C.

Si un élève ne connaît pas la formule, il peut la retrouver en utilisant la symétrie par rapport au diamètre passant par C et se ramener à celle relative à un rectangle.

c) Pour répondre à la question sur l'existence d'un triangle d'aire 7 cm^2, les élèves peuvent utiliser un argument de valeurs intermédiaires (ce qui est un implicite fort pour certains élèves depuis le C E 2) pour la fonction qui, au point C, associe l'aire du triangle A B C. Ils peuvent aussi résoudre une équation permettant de calculer la hauteur du triangle relative à une base donnée mesurée et terminer par une construction géométrique du point C.

Dans le premier cas de figure, les points A et B sont situés sur le cercle de manière que la droite A B soit parallèle à un bord de la feuille, support du dessin. Dans le deuxième cas de figure, la droite A B est oblique.

On voulait savoir si la position des points allait avoir une influence sur la recherche du problème.

Les questions du II font appel au calcul numérique et encadrement dans les décimaux.

5.3 - Analyse des productions des élèves du C M 2 au problème T 7 (I c))

Nous ne parlerons ici que du problème T 7. Notons que le changement de position des points n'a pas eu une influence que nous puissions relever. Nous avons mentionné le problème I a) car nous ne pouvons pas exclure a priori une influence de ce problème sur les procédures de recherche de T 7.

5.3.1 - Procédures

Nous les avons classées en 3 catégories.

Cat. 1 : Procédures empiriques ou bloquantes

. Tâtonnements numériques au hasard sans repérer de fonction ou de sens de variation de ce qui variait : par exemple ne proposer que 2 x 7 = 14, ou utiliser les particularités numériques des longueurs mesurées ou des aires déjà calculées.

. Renoncement devant un trop grand éventail de choix.

Cat. 2 : Procédure expérimentale

. Encadrement géométrique du point cherché ; on place un point sur le cercle, on mesure la hauteur, on calcule l'aire, on compare à 7, on modifie le point au vu du résultat - et ce, jusqu'à trouver une hauteur qui convienne !

Cat. 3 : Procédure théorique

. Calcul de la hauteur à l'aide de la formule de l'aire du triangle, par division ou par encadrement.

Cadres

. Les procédures des catégories 1 et 3 ne sollicitent qu'un cadre :

le numérique.

. Celles de la catégorie 2 font intervenir les cadres numérique et géométrique en interaction.

Classement des élèves selon les procédures développées :

en C M 2	cat. 1	cat. 2	cat. 3	
	Kamel	Laurent (2)	Bastien	Mathieu
	Laurent (1)	Marc	Camilo	Olivia
	Virginie (1)	Sandrine	Elsa	Virginie (2)
	Jacques	Valérie	Gilles	Yannick
			Hélène	

Pour ceux qui ont changé de procédure on a indiqué l'ordre entre parenthèses.

		Cat. 1	Cat. 2	Cat. 3	Restent bloqués en Cat. 1
15 élèves 17 procédures	en C M 2	4 sur 17	4 sur 17	9 sur 17	2 élèves sur 15
28 élèves 36 procédures	en 6ème	12 sur 36	8 sur 36	16 sur 36	8 élèves sur 28

5.3.2 - Commentaires

On a fourni la formule de l'aire du triangle à tous ceux qui n'ont pas pu la retrouver tout seuls et qui en exprimaient le désir. Parmi ces élèves, pour 2 sur 4 en C M 2 et 5 sur 12 en 6ème qui se trouvent classés en catégorie 1, l'information entraîne un changement de catégorie de procédures. Pour les autres, la formule leur permet de calculer des aires souvent avec des calculs justes, mais ne leur permet pas d'établir une relation entre la variation de l'aire et celle de la hauteur, ce qui leur permettrait de progresser. Pour 5 élèves sur 8 de 6ème classés en catégorie 2, l'information entraîne aussi un changement de catégorie.

Les élèves classés en catégorie 3 calculent tous, soit à partir d'une

équation explicite 4,6 x h = 7 écrite ou orale, (4,6 ou 4,8 selon les élèves) soit en effectuant la division. Tous connaissent la formule de l'aire du triangle.

5.3.3 - Existence du triangle

Nous avons réparti en 4 classes les conceptions qui se sont manifestées à travers les procédures de recherche du problème T 7.

C_1) Le triangle existe parce qu'on peut exhiber un triangle d'aire supérieure à 7 cm^2 et un triangle d'aire inférieure à 7 cm^2. Et on a un procédé pour trouver des triangles d'aires de plus en plus proches de 7 cm^2 : on cherche x tel que $x \times 4{,}6 = 2 \times 7 = 14$.

Pour Elsa, la division de 14 par 4,6 fournit le nombre x cherché. Si la division s'arrête, on a x ; si elle ne s'arrête pas, on a, avec les quotients successifs, des valeurs de plus en plus proches de x .

C_2) Le triangle existe si le processus d'encadrement ou la division s'arrête en un nombre fini de coups. Sinon, on trouve seulement des triangles proches.

C_3) Pour trouver la hauteur, il faut diviser 14 par 4,6. Mais on ne distingue pas les différents ordres du quotient. Le triangle existe "parce qu'on peut diviser" (Jacques).

C_4) Les cas divers. Citons les 2 cas du C M 2 que nous n'avons pas classés :

Sandrine : "On ne peut pas savoir, parce que pour connaître l'aire, il faut connaître la hauteur et pour cela, il faut savoir où est le point."
Elle ne sait pas comment choisir le point pour tomber juste sur 7 cm^2.

Kamel : semble perturbé par le fait d'avoir à manipuler des triangles. Pour obtenir l'aire du triangle, il veut multiplier les longueurs de 2 côtés.

Il veut trouver un point C sur le cercle tel que la distance [C,A] soit 2 cm et la distance [C,B] soit 7 cm pour que 2 x 7 = 14 et 14 divisé par 2 soit égal à 7. Le fait de disposer de la formule de l'aire du triangle ne résout pas ses difficultés.

Classement des élèves selon les conceptions manifestées.

	C_1	C_2	C_3	C_4
C M 2	Bastien Camilo Elsa Gilles Valérie Yannick Laurent	Hélène Marc Mathieu Olivia Virginie	Jacques	Sandrine Kamel
C M 2	7 sur 15	5 sur 15	1 sur 15	2 sur 15
6ème	8 sur 28	2 sur 28	10 sur 28	8 sur 28

Notons que, pour Laurent que nous avons classé en C_1, la formulation est peu nette. Pour des hauteurs h_1 et h_2 correspondant à des triangles dont l'aire encadre 7 cm^2, il déclare "la hauteur qu'on cherche est entre les deux."

Pour les élèves en C_2, le problème est bien de connaître le nombre qui mesure la hauteur. Mais le connaître veut dire pour eux, disposer de toute l'information sur le nombre, c'est-à-dire connaître toutes les décimales. C'est ce qu'exprime la recherche désespérée d'Olivia qui pour 7 : 4,7 a calculé 1,4893617021 et qui déclare "j'ai peur que ça finisse jamais !".

Les conceptions développées majoritairement en C_1 et C_2 témoignent de l'appropriation par chacun du point de vue de l'approximation. Ils expriment en général la possibilité d'obtenir des triangles d'aire proche, très proche, encore plus proche de 7 cm^2. Nous considérons qu'il s'agit là d'un effet de l'apprentissage. Toutefois, les conclusions quant à l'existence du triangle d'aire exactement

7 cm^2 ne sont pas uniformes. Nous interprétons cela, compte tenu des connaissances théoriques des élèves en mathématiques, comme une manifestation de leurs différences.

5.3.4 - <u>Calcul de la hauteur</u>

5.3.4.1 . Pour <u>exprimer</u> et <u>calculer</u> la hauteur, les élèves ont recouru

— soit à une <u>équation</u> formulée par écrit ou oralement. (Ils l'ont résolue par division ou par test à un cas près qui l'a posée sans savoir la résoudre.)

	explicite écrite	explicite orale
résolue par division	Bastien - Elsa 3 Hélène - Olivia	Yannick 3
résolue par test	Gilles - Sandrine Valérie - Virginie	Mathieu 1
non résolue	Jacques	

— soit à une <u>division</u> : Camilo - Kamel - Laurent - Marc.

Signalons que Kamel n'a pas trouvé tout seul une expression de la hauteur à partir des données, mais il en a reçu de l'interrogateur une expression sous forme de fraction. C'est cette expression que Kamel a traduite immédiatement en une division qu'il a très correctement effectuée.

5.3.4.2 Pour <u>encadrer</u> la hauteur, ils ont opéré soit par prolongement de la division, soit par test pour obtenir un nombre qu'ils ont ensuite comparé à 7 (ou 14 selon la référence choisie).

- par <u>prolongement</u> : Bastien - Elsa - Hélène - Marc - Mathieu - Olivia - Yannick
  7 sur 15
- par <u>test</u> : Gilles - Kamel - Valérie - Virginie
  4 sur 15
- Camilo a produit des encadrements très fins du quotient décimal au 1/100e puis au 1/1000e de la division, en formulant que ça n'était

pas la hauteur, mais qu'il ne la connaissait pas et qu'il ne savait encadrer que son résultat de division.

- 3 élèves n'ont pas fourni d'encadrement du tout :
Jacques - Sandrine - Laurent.

5.3.5 - Technique de calcul en situation

Il s'agit d'opérations suscitées par le problème. La plupart ont eu à faire des multiplications de nombres à 2 chiffres (pour ceux qui ont travaillé par test surtout) et des divisions par 4,6 ou 4,8.

Bilan : aucun ne bute sur la technique.

Bastien - Camilo - Elsa - Mathieu - Olivia - Yannick ont eu l'occasion de montrer dans leurs calculs, qu'ils jouissaient d'une bonne technique.

5.4 - BILAN

5.4.1 - En C M 2,

. 12 élèves proposent une réponse au problème, tous ceux dont la position vis à vis de l'existence du triangle se classent en C_1 ou C_2.

. 3 élèves ne fournissent aucune réponse et sont bloqués :
Kamel - Jacques - Sandrine.

Pourtant Sandrine a débuté sa recherche par une procédure expérimentale (cat. 2). Mais, elle a été arrêtée par une impossibilité à choisir un nombre (implicitement parmi une quantité énorme de nombres) qui mène à 7 cm^2.

Remarquons que les élèves en C_1 et C_2 se répartissent à peu près en parts égales (7 et 5).

Du point de vue technique, l'outil algébrique est sollicité par 11 élèves. Mais l'un d'eux, Jacques, ne sait pas s'en servir. Pour 10 élèves sur 15, l'outil est efficace, accompagné ou non de la mise en oeuvre de la division.

- 4 résolvent l'équation par division, 4 par test, 4 élèves seulement recourent à un calcul direct.

Du point de vue numérique, 7 élèves sur 15 utilisent les relations entre la fraction a/b et les quotients décimaux obtenus en divisant a par b.

Nous allons maintenant comparer ces résultats à ceux obtenus en 6ème pour le même problème.

5.4.2 - Comparaison CM2 - 6ème

. 8 élèves sur 28 restent bloqués et ne fournissent aucune réponse.

Sur les 20 restants, 16 adoptent une procédure de calcul pour la hauteur, 4 maintiennent une procédure expérimentale.

La proportion d'élèves en cat. 3 est à peu près la même en 6ème et en C M 2. C'est le nombre d'élèves bloqués qui crée la différence.

Du point de vue des conceptions relatives à l'existence du triangle, le profil en C M 2 et en 6ème est complètement différent. Les conceptions C_1 et C_2 rassemblent 12 élèves sur 15 en C M 2, moins de la moitié (10 sur 28) en 6ème. Le fait que C_2 ne concerne pratiquement personne (2 sur 28) en 6ème alors que C_3 en concerne 10 sur 28 indique que la plupart des élèves qui recourent à une division pour déterminer la hauteur identifient la mesure de la hauteur à un quotient décimal de la division, ce qui ne se produit quasiment pas en C M 2.

Du point de vue du recours à l'outil algébrique, 3 élèves sur 28 écrivent une équation en 6ème contre 9 sur 15 en C M 2 ; 4 élèves la formulent oralement en 6ème contre 2 en C M 2. Au total, 7 élèves sur 28 en 6ème recourent à une équation qu'ils résolvent en général par division (6, et 1 par test et encadrement) contre 10 élèves sur 15 en C M 2 (nous ne comptons pas Jacques qui n'en a rien fait).

Nous repérons dans le comportement des élèves de C M 2 : peu de blocage, des essais de procédures expérimentales jouant sur 2 cadres même si elles n'aboutissent pas (cf. Sandrine) ou mal (cf. Laurent), la distinction entre fraction et quotient décimal, le recours aux équations, autant de marques de l'apprentissage.

6 - ENTRETIENS INDIVIDUELS - Problèmes R 39 et R 41

C M 2 - juin 1980 - 9 élèves : Bastien - Camilo - Elsa - Gilles - Hélène - Isabelle - Olivia - Virginie - Yannick.

6ème Lakanal - juin 1981 - 28 élèves.

6.1 - Enoncé

1) Peux-tu trouver un rectangle dont le demi-périmètre mesure 41 cm et l'aire 402 cm^2.

2) Peux-tu trouver un rectangle dont le demi-périmètre mesure 39 cm et l'aire 402 cm^2.

L'interrogateur pose un problème. L'élève le résout (ou tente de le faire). Quand l'élève estime qu'il a terminé, l'interrogateur lui donne l'autre problème.

6.2 - Analyse de la tâche

Traduit dans le cadre algébrique, chacun des problèmes revient à chercher les racines d'un polynôme du 2ème degré connu puisqu'on connait la somme et le produit des racines. Compte tenu du niveau scolaire, ce procédé est exclu.
Le problème posé est un problème d'existence assorti de recherche des dimensions. Les élèves de C M 2 comme ceux de 6ème ont eu, au cours de l'année scolaire (novembre - décembre pour chaque classe), à chercher parmi des rectangles de demi-périmètre fixé s'il y en avait un dont l'aire était plus grande que celle des autres. Une preuve géométrique a été exhibée pour affirmer que le carré répondait à la question. Ils ont aussi dans les 2 classes aux mois de novembre - décembre (80 pour les uns, 81 pour les autres) résolu des problèmes analogues à ceux de l'entretien, notamment en épreuve écrite en 6ème, ils ont eu à chercher un rectangle de demi-périmètre 36 cm et d'aire 350 cm^2. Nous en parlerons plus loin.

Dès lors, il leur est en principe possible de tester l'existence avant de se lancer dans la recherche de dimensions, en calculant l'aire du carré de la

famille. Le problème R 39 est ainsi réglé, mais le problème R 41 demeure. Ce problème se présente comme la recherche de 2 nombres a et b dont on connait la somme 41 et le produit 402. Les inconnues sont quasiment désignées dans l'énoncé. Or une difficulté se présente. Les inconnues repérées jouent un rôle symétrique dans le problème. Alors, ou bien on garde la symétrie et il faut traiter les 2 inconnues simultanément ; ou bien on privilégie l'une des inconnues et on renonce à leur traitement symétrique. Il y a un choix à faire. Il faut aussi choisir une équation. Ceci étant fait, on peut chercher et trouver des couples (a,b) solution. En substituant un couple solution dans l'autre équation on trouve un nombre à comparer à 402 ou 41 selon l'équation choisie. La valeur trouvée est plus ou moins satisfaisante, plus ou moins proche du nombre imposé. Le travail consiste dès lors à modifier le choix du couple de manière à se rapprocher de la valeur voulue.
Le moyen le plus adapté est de rechercher parmi les couples (a,b) tels que $a + b = 41$, des couples dont le produit $a \times b$ soit proche de 402. Pour cela, il est intéressant de repérer la variation du produit $a \times b$ en fonction du couple (a,b) de manière à mettre sur les couples un ordre exprimant qu'un couple est meilleur qu'un autre. Cela nécessite de trouver une variable caractérisant les couples et qui permette en ordonnant les valeurs de la variable d'ordonner les couples. Cela est possible si on a repéré que l'hypothèse $a + b$ constante se traduit par le fait que a et b varient en sens inverse et plus précisément, pour tout nombre h, $a + b = (a + h) + (b - h)$. Ainsi, pour ordonner les couples on peut privilégier soit a, soit b, soit $|b - a|$. (En effet

$$a . b = a (41 - a) = b (41 - b) = \frac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{4} = \frac{(41)^2 - (a - b)^2}{4}.$$
)

Ce choix fait, on a les moyens d'exhiber, comme dit Yannick, "un rectangle d'aire plus grande que 402 et un d'aire plus petite". On peut alors, en se référant implicitement à un principe de valeurs intermédiaires, affirmer l'existence du rectangle cherché ou seulement "resserrer" l'intervalle d'incertitude et améliorer le choix de (a,b).

Une autre procédure pour situer convenablement le couple (a,b) cherché serait de tracer point par point la courbe représentant la variation d'aire à périmètre constant (a + b = 41). Il y aurait à représenter $a \mapsto a \times (41 - a)$ et à repérer une valeur approximative de a telle que $a \times (41 - a) = 402$.

Une autre possibilité encore serait de tracer les 2 courbes constituées l'une des couples (a,b) tels que a + b = 4 1, l'autre des couples (a, b) tels que a x b = 402 et d'examiner leur éventuelle intersection.

Dans toutes ces procédures, les outils sont les notions de variable, constante, inconnue , fonction, représentation graphique, les nombres décimaux constituent eux l'outil numérique adapté.

Nous pourrons repérer l'usage que font les élèves de ces outils et en particulier des nombres décimaux. Nous repèrerons les cadres de travail qu'ils retiennent et le cas échéant les changements de cadres, ce qui les a provoqués et les effets qu'ils ont eus.

Remarque : En général, le terme "nombre" est interprété par les élèves comme "nombre entier", la pratique leur apprend que, dans le cas contraire, on précise "nombre décimal", "fraction". Un avantage à poser le problème dans le cadre géométrique est d'indiquer que tous les nombres sont impliqués puisqu'il s'agit de mesures.

6.3 - Analyse des productions des élèves

6.3.1 - Procédures relevées en C M 2 pour R 41.

P_1 : 1) Choix d'un couple (a,b) d'entiers tels que a + b = 41
Calcul pour ce couple de a x b, comparaison à 402
Si le résultat est différent de 402, on recommence avec un autre couple. Les calculs faits n'influent pas sur le choix des couples ultérieurs.

2) Après quelques essais, on renonce au problème.

P'_1 : Variante de P_1 en commençant par le choix d'un couple (a,b) tel que a x b = 402.

P_2 : 1) La première étape est la même qu'en P_1. Mais le choix du 3ème ou 4ème couple est fait en fonction des résultats des premiers calculs, dès que 2 couples (a,b) et (a',b') définissent une fourchette pour l'aire. Le choix suivant est alors a'' (décimal) compris entre a et a' et b'' compris entre b et b' tel que a'' + b '' = 41.

2) Les choix successifs améliorent la précision.

P'_2 : P_2 en formulant de plus le sens de variation de l'aire en fonction de la variation de a et b (Elsa).

P_3 : 1) Référence à l'aire du carré ou à celle d'un rectangle supérieur à 402 pour affirmer l'existence du rectangle cherché.

2) P_2 ou P'_2.

P_4 : 1) La procédure débute comme en P_1 mais le resserrement de la fourchette ne satisfait pas.

2) Remise en cause de l'existence du rectangle au vu des résultats numériques. On veut exactement 402.

3) Sur incitation de l'interrogateur, construction graphique de couples (a,b) tels que a + b = 41.

4) Formulation écrite ou orale, à propos de chaque point, de l'aire correspondante ; (à ceux qui ne notaient pas l'aire, l'interrogateur a demandé de l'inscrire à côté du point).

5) Conviction retrouvée de l'existence du rectangle et réponse par un encadrement au demi, au quart, au dixième, toujours en écriture décimale (.,5 ; .,25 ; ...)

6.3.2 - Procédures en C M 2 pour R 39

P_1 : Comme pour R 41.

P_2 : Comme pour R 41 suivie d'une réponse négative quand on constate que les produits restent loin de 402.

P_3 : . Un seul calcul, celui de l'aire du carré.
. Comparaison de l'aire du carré à 402 et réponse négative.

P_4 : Référence à la variation de l'aire en fonction de $|a - b|$ et réponse négative.

Nous résumons les comportements aux 2 problèmes R 39 et R 41 dans un tableau.

6.3.3 Tableaux des procédures.

Procédures / élèves	R 41: $P_1P'_1$	$P_2P'_2$	$P_3P'_3$	P_4	R	R 39: P_1	P_2	P_3	P_4 $\|a-b\|$	Géométrie
Bastien			x → x		$\mathbb{D}_2$			x		
Camilo			x		$\mathbb{D}_1$			x		
Elsa		$\mathbb{N} \to D$; ε, I G →	→	x	$\mathbb{D}_1$		x →	→	x	
Gilles			$\mathbb{N} \to 1/2 \to 1/4$		$\mathbb{D}$			x		
Hélène			x → x → ; ε, IG	x	$\mathbb{D}_2$			x		
Isabelle	⇄ $\mathbb{N}$, IG →	→	→	1/2	$\mathbb{D}$					x
Olivia	x IG x					x				
Virginie			$\mathbb{N} \to \mathbb{D}$; $\xi \nearrow_I \searrow_G$ →	x	$\mathbb{D}_2$		x			
Yannick		$\mathbb{N} \downarrow D$			$\mathbb{D}_1$		x			

Les P indiquent les procédures et les R les réponses.

$\mathbb{N}$: Utilisation d'entiers

1/2 Partage en 2 de l'intervalle

1/4 Partage en 4 de l'intervalle

$\mathbb{D}$ Utilisation des décimaux

$\mathbb{D}_1$ Décimaux au 10ème

$\mathbb{D}_2$ Décimaux au 100ème

$\xi \nearrow \searrow$ Perd le sens de variation

ε Remise en cause de l'existence du rectangle.

IG L'interrogateur propose de construire un graphique.

Cas Isabelle - élève du C P → C M 1

. Elle a été absente toute l'année de C M 2, est revenue fin juin.

. Elle a demandé à l'interrogateur ce que les élèves avaient fait sur ce sujet.

. L'interrogateur lui a proposé de dessiner l'un sur l'autre avec un coin en commun, deux rectangles de dimensions différentes mais de la famille 39.

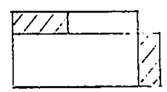
. Elle a ensuite continué toute seule la procédure jusqu'à la conclusion.

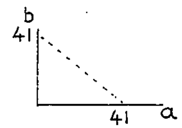
6.3.4 - Changements de cadre

Examinons les procédures des élèves du point de vue des cadres de travail. Deux cadres s'imposent : le géométrique et le numérique. Mais la modélisation du problème est évidente et le cadre géométrique disparait pour tous sauf pour Isabelle (C M 2) chez qui il est réintroduit de l'extérieur.

Toutefois, le cadre algébrique est le cadre implicite de travail comme le révèlent ceux qui peuvent expliciter les équations mais ne peuvent pas les résoudre. Or les équations par leur formulation simple, cachent leur complexité. Elles sont une photographie à un instant donné de la fonction. Faire des essais, cela veut dire "animer l'équation", complexifier la situation. Une aide importante est constituée par la possibilité de recourir à une représentation adéquate, qui va servir à recueillir l'information au fur et à mesure qu'elle est produite et qui, par sa lecture, va pouvoir offrir une information globale. Ce nouveau regard va déboucher sur une localisation intentionnelle du problème et ainsi faire progresser.

C'est ce que nous constatons pour le problème R 41 en C M 2 chez Elsa, Hélène, Isabelle et Virginie. Pour Isabelle, deux représentations ont joué : le dessin de 2 rectangles





et la représentation graphique des couples (a,b) trouvés tels que a + b = 41.

Pour les autres, dont une phase de l'apprentissage en C M 2 avait été consacrée à l'étude de la variation d'aire des rectangles à périmètre constant et à la recherche d'un rectangle d'aire maximum, la seule représentation graphique a permis à Elsa de "se situer" ; elle a permis à Hélène de se convaincre que le rectangle existait. Hélène déclare : "tous les points de la droite sont des rectangles et entre 401,76 et 402,1875 il y a 402". Et elle conclut : "le quadrillage prouve mieux".

Pour Olivia, le graphique n'apporte rien, il ne permet pas la représentation de sa conception de l'existence du rectangle. Elle utilise bien un algorithme d'encadrement mais elle veut "trouver un nombre juste". La diversité des résultats numériques la perturbe. Sur suggestion de l'interrogateur, elle veut bien faire un graphique. Mais elle dit, en désignant les axes de son graphique et après avoir reporté quelques points (a x b = 402) : "Ils n'aident pas à trouver, seules les multiplications peuvent aider". Signalons cependant une différence entre Olivia et tous les autres élèves interrogés : elle a réclamé une calculette, nous la lui avons fournie. Après un certain nombre d'essais infructueux, l'interrogateur lui suggère de choisir a + b = 41 plutôt que a x b = 402, elle répond : "c'est pareil, j'ai les 2 boutons".

Virginie, après s'être assurée que l'aire du carré était supérieure à 402 entame une procédure d'encadrement. Elle choisit les couples (20,21) (25,16), veut un couple "entre", choisit (26,15) elle est surprise, elle continue avec (24,17), (23,18). Elle revient à (25,16) (16,5 ; 25,5). Elle exprime son désir d'encadrer 402 de façon plus serrée, mais elle ne contrôle pas ou mal le sens de variation. L'interrogateur lui suggère de porter son information sur un graphique, ce qu'elle fait avec efficacité. Le report graphique lui fournit, par lecture, les bornes du meilleur intervalle : c'est (24,7 ; 16,3) (24,8 ; 16,2) (pour lesquelles elle a déjà calculé les produits a x b). Elle propose alors un dernier essai : 24,71 x 16,29.

6.4 - Comparaison des procédures en C M 2 et en 6ème
Décembre 1980.

Les données du problème pour les 6ème étaient, nous le rappelons : demi-périmètre 36 cm, aire 350 cm^2.

6.4.1 - Description des procédures en 6ème

Nous avons relevé plusieurs procédures, que nous désignons par Q_0, $Q_1, \dots, Q_7$.
Nous les décrivons ci-dessous par les actions des élèves.

Q_0 : . N'importe quoi numérique (par exemple,

$$350 \,\underline{|\; 36\;}\; \quad 9{,}7 \times 4 = 388 \qquad \text{ou} \qquad 350 \,\underline{|\; 36\;}\; \quad 9{,}7 \qquad 36 - 9{,}7 = \;)$$

."Je cherche des coordonnées" : déclaration non suivie d'effet.

Q_1 : Donne 2 ou 3 valeurs entières aux dimensions et répond "non".

Q_2 : Calcule le périmètre ou traite séparément les 2 équations et donne plusieurs solutions entières pour chacune.

Q_3 : Attribue systématiquement les valeurs entières de 1 à 18 à l'une des dimensions, calcule l'autre dimension, l'aire (avec ou sans erreur de calcul) ; range toutes les informations dans un tableau, compare à 350 et conclut négativement.

Q_4 : Ecrit les équations $\ell + L = 36$, $\ell \times L = 350$ et s'arrête ("Je ne sais pas comment faire").

Q_5 : Q_3 suivie d'une étude au voisinage de 324 = 18 x 18 (18,55 x 17,45 = 323,6975 ; 18,99 x 17,01 = 320,0199) et réponse négative.

Q_6 : Q_3 suivie de "impossible, il faudrait les décimaux,..., on ne peut pas tout calculer".

Q_7 : Se réfère au carré, $324 < 350$ et répond négativement.

Remarque : Des erreurs de calcul amènent certains élèves, dans la procédure Q_3, à trouver des valeurs d'aire > 350.

6.4.2 - Analyse des procédures

Dans cinq de ces procédures : Q_0, Q_1, Q_2 Q_4, Q_7 (choisies dans leur ensemble par 15 élèves sur 31) les dimensions a et b sont traitées de façon symétrique . Les trois autres (Q_3, Q_5, Q_6) disymétrisent le problème (elles regroupent 16 élèves). La procédure Q_3, adoptée par 14 élèves, consiste à transformer le problème en 18 petites questions auxquelles on répond par oui ou par non. Si le nombre cherché n'est pas "vu" (dans le tableau des valeurs) ou fourni par le calcul, le problème n'a pas de solution. Un élève écrit : "le tableau ne le montre pas" [le rectangle] en se référant à un tableau ou par erreur de calcul, une des valeurs d'aire dépassait 350. La procédure Q_7 reflète un apprentissage (étude de la variation d'aires de rectangles dont le périmètre est constant). La procédure Q_5 exprime le souci d'étudier le problème au voisinage du maximum "vu".

Répartition des procédures

Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q6	Q7
6	3	3	14	1	1	1	2

Rappelons qu'en C M 2 on trouve 3 procédures (mise à part celle d'Isabelle), P_1 sans analogue ici, P_2 qui correspond à Q_5 et P_3 qui correspond à Q_7, et aucune des autres.

En 6ème, les conceptions vont évoluer au cours de l'année et quand en juin nous poserons des problèmes du même type, la procédure Q_3 aura pratiquement disparu, il y aura un usage plus fréquent des décimaux. Toutefois nous trouverons encore des procédures de type Q_0 et un refus chez certains élèves de sortir du cadre des entiers. Leur argument est encore celui-là même exprimé par Sandrine en décembre (Q_6) : "On ne peut pas tout calculer". Voilà, impossible d'énumérer

tous les nombres. La compétence technique (ce qui était le cas de Sandrine) n'est d'aucune utilité si on ne dispose d'aucun moyen pour guider son choix de nombres.

L'observateur extérieur pourrait interpréter la constitution par l'élève d'un tableau de correspondance des valeurs (a, b, a x b) comme la manifestation de l'intérêt que porte l'élève à la correspondance fonctionnelle entre les variables repérées. Mais en fait, rien ne dit que, dans le cas où le tableau est limité aux seuls entiers, l'élève donne à a et b le statut de variable. Le tableau peut très bien rester à un niveau de "constantes" et n'exprimer que des relations isolées, entre 3 termes a, b, a x b, sans rapport entre elles. En effet, la procédure par épuisement des cas un à un n'est pas très coûteuse tant qu'il ne s'agit que d'entiers en quantité limitée.

Ce qui distingue les décimaux des entiers, c'est qu'entre deux décimaux, il en existe toujours un autre distinct et donc une infinité. Si on veut se servir des décimaux dans des situations qui mettent en jeu cette caractéristique, il faut les avoir construits dans des situations n'ayant pas un caractère fini, mais un caractère infini par nature (ou fini, mais avec un si grand nombre de cas à traiter qu'elle prend un caractère infini), même si on n'exploite pas toute l'infinité.

Pour conduire ces situations, il faut pouvoir en contrôler les variations numériques et donc apprendre à utiliser le mode de variation des variables en jeu. Cela explique l'importance que nous accordons à l'étude de fonctions dont la variable a une origine géométrique ou aux études graphiques sur quadrillage dont le nombre de points à considérer s'évalue en milliers. Et là, on est avantagé si on sait calculer et conduire ses calculs.

Nous voyons dans l'absence, chez les élèves de CM_2, de la procédure Q_3 massive en 6ème, l'influence de l'apprentissage.

6.5 - Réponses des élèves de 6ème - en juin 1981 - aux problèmes R 39 et R 41.

Nous ferons des comparaisons très schématiques car une étude plus exhaustive avec Marie-Jeanne Perrin est en cours.

Précisons que la diversité des procédures a été beaucoup plus grande en 6ème qu'en C M 2. Cependant nous n'avons que 9 entretiens en C M 2 et de plus les élèves interrogés sont parmi les 13 considérés comme bons. Donc les comparaisons doivent être faites avec une grande prudence.

Nous avons classé les procédures développées en 6ème, comme pour le problème T 7, suivant 3 catégories :

Cat.I - Les procédures empiriques et les dérapages. Nous y associons la procédure P_1 des C M 2.

Cat.II - Les procédures expérimentales : essais, tâtonnements suivis d'encadrements soit locaux (nous y associons P_2 en C M 2), soit guidés par une stratégie (P'_2,P_4).

Cat.III- Les procédures soutenues par un argument se référant à une connaissance établie et par une stratégie (nous y associons P_3 et P'_3 en C M 2.)

Voici les tableaux résumés des réponses et des procédures en 6ème et en C M 2. Nous ne retenons que les procédures finales en cas de changement de procédures.

6ème 26 élèves C M 2 9 élèves

Procédures	I C M 2	I 6ème	II C M 2	II 6ème	III C M 2	III 6ème
R 39	1	11	3	8	5	7
R 41	1	9	5	9	3	8

Comparaison des réponses

	C M 2	6ème
R 39 n'existe pas réponse argumentée	6 sur 9	7 sur 26
Après essais numériques R 39 n'existe pas	3 sur 9	10 sur 26
Pas de réponse	0	9 sur 26

	C M 2	6ème
R 41 Stratégie d'encadrement	7 sur 9	8 sur 26
R 41 Encadrement grossier	1 sur 9	9 sur 26
R 41, après essais, n'existe pas	1 sur 9	4 sur 26
Pas de réponse, blocage	0	5 sur 26

En conclusion (cf. 6.6), nous allons commenter ces réponses suivant deux caractères : la mise en fonctionnement des décimaux et les changements de cadres.

6.6 - CONCLUSION

6.6.1 - Mise en fonctionnement des décimaux

Les procédures observées font appel soit aux nombres entiers exclusivement (0 en C M 2, 5 en 6ème), soit aux nombres décimaux. Examinons ce dernier cas. On peut répartir ces procédures en trois catégories distribuées très différemment selon la classe :

1) Les décimaux sont tous traités de la même façon. On ne recherche aucun moyen de privilégier les uns par rapport aux autres. Les élèves qui se trouvent dans ce cas et qui sont capables, par ailleurs, de concevoir toute la richesse des décimaux, sont attérrés par l'immensité des cas à envisager, des calculs à faire et par l'impossibilité de réaliser leur projet ("On ne peut pas tout calculer"). Ils sont bloqués. On observe alors trois issues à cette situation bloquée :

- On ne fait rien (c'est le cas de Sandrine, en C M 2, au Pb T 7), ou on manipule des nombres, on fait des opérations justes mais dépourvues de sens vis à vis du problème. Par exemple $402 : 41 = \alpha$, $41 - \alpha = \beta$. (Toutefois les équations aux dimensions sont respectées.)

- On change de procédure quand c'est possible. C'est le cas pour le problème T 7 qui ne comporte qu'une variable. Le problème rectangle, avec ses deux variables, bloque : 6 élèves en 6ème répondent à T 7 et ne répondent pas aux problèmes R 39 ou R 41.

- On restreint le champ des choix possibles : par exemple en se limitant aux entiers ou en conjecturant qu'une certaine quantité (ici l'aire) reste constante, alors qu'elle varie. Les hypothèses, confrontées aux faits, peuvent être revues et la situation peut se débloquer.

Nous classons Olivia (C M 2) dans cette catégorie d'élèves bien qu'elle ait un comportement un peu différent. Elle n'hésite pas à faire de nombreux calculs. Mais après essais, elle déclare que le problème n'a pas de solution.

2) On fait des essais non organisés, mais une fois proche de la solution, on modifie les choix en faisant une hypothèse sur le sens de variation des éléments qui peuvent varier. Nous notons là une utilisation <u>locale</u> de la notion de fonction. Nous avons repéré ce comportement chez 1 élève sur 9 en C M 2 et 7 sur 26 en 6ème.

3) On trie les données, on aborde la question selon le caractère fixe ou variable des éléments en jeu <u>et</u> une hypothèse sur le sens de variation des unes par rapport aux autres. Cette organisation permet de réduire l'incertitude à des intervalles de plus en plus petits. Les décimaux servent alors à désigner les bornes des intervalles. C'est le cas pour 7 élèves sur 9 en C M 2 et 8 élèves sur 26 en 6ème.

Dans ce cas, le problème est envisagé de façon <u>globale</u>. La fonction est un outil implicite. Notons toutefois que la mise en oeuvre de cette procédure peut être parfois perturbée par la complexité de la tâche.

6.6.2 - Changements de cadre

En 6ème, nous avons observé chez certains élèves d'énormes résistances à changer de cadre.

De façon très schématique, nous pouvons dire qu'en 6ème les élèves, classés en catégorie 1, résistent au changement de cadre et en général ne progressent pas. Ceux de la catégorie 3 ne changent pas de cadre, mais comme ils n'en ont pas besoin, on ne peut pas savoir s'ils y résisteraient, en cas de difficulté. Ceux de la catégorie 2 au contraire cherchent à jouer l'interaction. C'est à cette occasion par exemple qu'ils étendent aux décimaux les modes de variation dimensions $\longmapsto$ aire repérés sur les entiers.

En C M 2, les changements de cadres apparaissent dans toutes les catégories de procédures telles que nous les avons constituées pour la 6ème (cf. Tableau des procédures 6.3.3). Ils font partie des habitudes.

C. EVOLUTIONS DIACHRONIQUES INDIVIDUELLES

1.- Evolutions cognitives

Pour caractériser les évolutions cognitives de nos élèves, nous allons tester l'apprentissage, et aussi repérer les conceptions et leur évolution de deux points de vue :

1) d'un point de vue algorithmique, soit à travers la technique opératoire dans des tâches de calcul, soit dans le fonctionnement d'outils "appelés" dans la consigne.

2) du point de vue du choix de l'outil en réponse à une question.

Cependant, ces points de vue sont trop imbriqués, par organisation même de l'apprentissage au moins, pour qu'on puisse vraiment les séparer.

1.1- Les épreuves retenues avec leur classification.

- Relation entre fractions décimales et écriture à virgule des nombres décimaux.
  Epreuves écrites des 10/2/78 et 6/3/78.
- Technique opératoire sur les nombres décimaux.
  Epreuves écrites des 22/5/78 - Juin 79 - Mars 80 : tâches de calcul.
  // // 13/3/78 - Mars 80 : rappelant des études faites en classe.
  Entretiens individuels de Juin 78 et Juin 80 : calculs en situation.
- Ordre sur les nombres décimaux.
  Epreuves écrites de Janvier 79 - Juin 79 - Mars 80 - Juin 80.
- Choix de l'outil en réponse à une question.
  Entretiens individuels de Juin 78 et Juin 80.

1.2- Tableaux des résultats.

Nous présentons deux tableaux résumant les performances des élèves du CP au CM_2 : du 4/5/76 au 17/1/77 (tableau 1), du 30/4/77 à Juin 80 (tableau 2). Nous avons indiqué, en haut de chaque colonne, la date de l'épreuve, le nombre d'élèves ayant fait cette épreuve, une indication sur le type d'épreuves : S production libre en situation.
1 texte imposé en relation avec la situation.
2 épreuve décontextualisée.

Nous avons codé les réponses de façon qualitative en adoptant les conventions suivantes :

X tout juste.
Xne juste à n erreurs près, où n est petit par rapport au nombre des questions.
Y presque tout juste.
/ en bonne partie juste.
\ plutôt faux, quelques réponses justes.
— rien ou presque rien.
(en général non fait, quelque fois fait incorrectement).

Plus précisément, le tableau 1 concerne :

. des épreuves passées en fin de CP, les 4-10-17 mai 76.

. des épreuves passées au premier semestre du CE_1, les 16-20-24 septembre, les 1-4-14 octobre puis le 17 décembre 76, les 6-7-8-17 janvier 77. Ces dernières épreuves sont analysées en II.3.3, les textes sont en annexes. Pour l'épreuve du 17/1/77, nous indiquons les procédures des élèves telles qu'elles sont décrites et codées en II.3.3.

Rappelons que les performances tehniques rapportées ci-dessus (dans le tableau 1) ont trait à l'addition, à la soustraction et à la multiplication des entiers (jusqu'à la centaine), les outils conceptuels relevant de la proportionalité (en CE_1).

Le tableau 2 concerne les épreuves (ou partie d'épreuves) suivantes :

C E 1	30/4/77	division euclidienne (IV A 1).
C E 2	22/9/77	soustraction, multiplication,
	3/11/77	division euclidienne sur des petits nombres (IV A 2 et 3).
	5/12/77	addition, soustraction de nombres fractionnaires (IV A 5).
	23/1/78	calcul de a ou b fractionnaire, a x b étant donné (IV A 11).
	6/3/78	calcul sur fractions décimales (texte en annexe).
	13/3/78	proportionnalité sur des longueurs (IV A 12).
	22/5/78	4 opérations (+, -, x, :) à effectuer (IV A 13).
	Juin 78	calculs effectués librement dans le problème "goûters" (IV A 14).
C M 1	12/1/79	comparaison de plusieurs couples de nombres décimaux (IV B 1).
	Juin 79	3 opérations (+, -, x) à effectuer (IV B 2).
C M 2	Mars 80	. mise en ordre (du plus petit au plus grand) de 7 nombres décimaux donnés. . additions et multiplications de nombres décimaux donnés (IV B 3).
	Juin 80	mise en ordre (du plus petit au plus grand) de 10 nombres décimaux donnés (IV B 4).

L'ordre de présentation des enfants dans les tableaux résulte de 2 critères : les élèves ont été classés en 3 catégories obtenues en regroupant certaines des 5 catégories obtenues en fin de CP, en allant de la plus performante à la moins performante. A l'intérieur de chaque catégorie, les élèves sont présentés dans l'ordre alphabétique des prénoms.

n = 19 élèves/ 20 élèves	4/5/76 S n = 17	10/5/76 S 1 n = 12	17/5/76 2 n = 13	16/9 2 n = 14	20/9 2 n = 13	24/9 2 n = 17	1/10 2 n = 14	4/10 2 n = 17	14/10 2 n = 13	17/12 1 2 n = 13	6/1/77 2 n = 16	7/1/77 2 n = 18	8/1/77 2 n = 15	17/1/77 S n = 19
Baštien	X	X /	abs(X)	X 1e	/	X 1e	abs	X	X	X X	X	X X 1e	/	P_4
Camilo	X	X /	abs(X)	Y	Y	/	/	/	abs	abs	/	X Y	—	P_5
Elsa										/ X	abs	\ —	abs	P_5
Gilles	/	X /	X	Y	X	\	X	X	abs	/ X	X	X2e Y	X	P_5
Grégoire	X	X /	X	abs	Y	X	X	X	abs	abs	X	X X	abs	P_5
Hélène	X		abs(X)	X	/	X	X	X	abs	abs	X	X X	/	abs
Isabelle	/		X	X 2e	X	X	X	X	abs	abs	/	/ /	X	P_4
Louison	/	/ /	X	X	X 1e	X 1e	X	X	X	X X	X	X X	/	P_5
Olivia	abs	X X	abs(X)	X	X	X 1e	X	X	X	X X	/ 2e	X X	/	P_3
Valérie	/	X X	X	X	Y	X	abs	X	X	/ X	X	X X1	/	P_5
Virginie	/		X	X	X 1e	Y	X 2e	X	X	/ X	X	X X2e	X	P_3
Yannick	X		X	X 1e	/	Y	X	X	X	X X	X	X X	abs	P_5
Kamel	X		Y	Y	abs	\	—	X	/	/ X	abs	abs	—	P_2
Laurent	/	X /	Y	abs	abs	\	abs	X 1e	X 2e	X X	X	X Y	/	P_1
Marc	/		Y	X 2e	X	/	X	X	X	abs	abs	X X2e	abs	P_3
Mathieu	/	X X	/	abs	abs	/	abs	X	X 2e	X /	X	X X	/	P_0
Frédérique	—	— X	abs	X 1e	X	/	X	X	X	abs	/	X Y	X	P_4
Jacques	—	/ /	abs	abs	abs	abs	X	abs	abs	abs	abs	abs	abs	P_0
Lidia	—	— —	—	abs	abs	abs	abs	abs	\	X X	/	X1e \	X	P_0
Sandrine	abs		—	X 1e	abs	Y	X 2e	X	X 1e	\ /	X	X /	—	P_0

n =	30/4/77 19	22/9/77 18	3/11/77 19	5/12/77 20	23/1/78 19	6/3/78 20	13/3/78 19	22/5/78 18	/6/78 19	12/1/79 16	/6/79 17	3/80 16	6/80 18
Bastien	X	X	/	X	X	x(10/2)	/	\	X	Y	Y	X	X
Camilo	X	/	/	X	X	X	abs	/	Y	X	\	X	X
Elsa	X	X	X	X	X	x(10/2)	/	X	X	X	X	X	X
Gilles	\	/	X	/	abs	\	/	Y	Y	Y	Y	X	X
Grégoire	X	X	X	X	X	X	X	Y	X	X			
Hélène	X	X	X	X	X	X	X	abs	X	Y	Y	X	X
Isabelle	X	X	/	X	X	/	Y	abs	X	abs	X	abs	X
Louison	X	X	X	X	X	X	X	Y	X	X			
Olivia	X	X	X	X	X	\	/	X	Y	abs	/	Y	X
Valérie	abs	/	X	X	X	X	X	X	X	X	/	Y	X
Virginie	/	/	/	/	/	X	Y	/	/	X	X	X	X
Yannick	X	X	/	/	/	/	\	/	/	X	/	Y	X
Kamel	X	X	/	X	X	\	X	Y	/	X	/	X	X
Laurent	/	X	\	\	\	\	/	\	\	Y	/	\	/
Marc	X	abs	X	X	X	X	X	Y	/	X	X	Y	X
Mathieu	\	/	X	\	\	/	/	Y	\	/	\	Y	X
Frédérique	X	\	/	/	/	\	\	/	/	abs	—	Y	X
Jacques	/	\	abs	\	\	—	—	/	abs	abs	abs	\	/
Lidia	\	\	\	\	\	\	/	\	\	/	\	\	/
Sandrine	\	abs	/	\	\	—	\	/	/	Y	/	abs	/

1.3- Eléments de bilan sur 18 élèves.

Nous allons donner un bilan de l'état des connaissances de nos élèves en Juin 1980 et décrire le chemin qu'ils ont parcouru depuis le CP. Après un rappel des résultats en termes de performances en Juin 80, nous résumons sur un diagramme les évolutions des performances de Mai 76 à Juin 80. Puis nous nous centrons sur l'évolution des conceptions de Janvier 79 à Juin 80, avec une évocation de la cohérence des résultats aux épreuves de Mars 80.

1.3.1- Rappel des résultats de Juin 80 (terme de notre projet).

. 2 élèves, Jacques et Lidia, échouent à l'ensemble des tâches, sauf à de la petite technique opératoire.

. 2 élèves, Laurent et Sandrine, échouent ou font des propositions partielles, selon la tâche.

. 1 élève, Frédérique, dispose d'une technique de calcul convenable et de bons algorithmes qu'elle ne sait pas souvent solliciter.

. 13 élèves sont performants par rapport à un C M 2 standard.

. Rappelons que 2 élèves, Louison et Grégoire, "très bons", n'ont pas suivi le C M 2.

1.3.2- Diagrammes des évolutions cognitives individuelles du point de vue algorithmique de Mai 76 à Juin 80.

Nous présentons, pour chaque élève, un diagramme qualitatif des performances techniques, construit à partir des tableaux 1 et 2. Pour cela, nous avons regroupé certaines épreuves. Finalement, nous prenons en compte les éléments suivants :

- 2 épreuves en Mai 76 : les 4 et 17.
- une moyenne des résultats aux épreuves de septembre 76, une moyenne d'octobre 76, ceux du 17/12/76, une moyenne des 6-7-8/1/77, ceux du 17/1/77,

- toutes les épreuves repérées dans le tableau 2 du 30/4/77 au 22/5/78.

Pour celles qui suivent, nous retenons :

- le problème "goûters" de Juin 78.
- les épreuves de janvier 79 (question 1), Juin 79 (question 1).
- les épreuves écrites de Mars 80 (questions 6-7-8), Juin 80 (question 2).

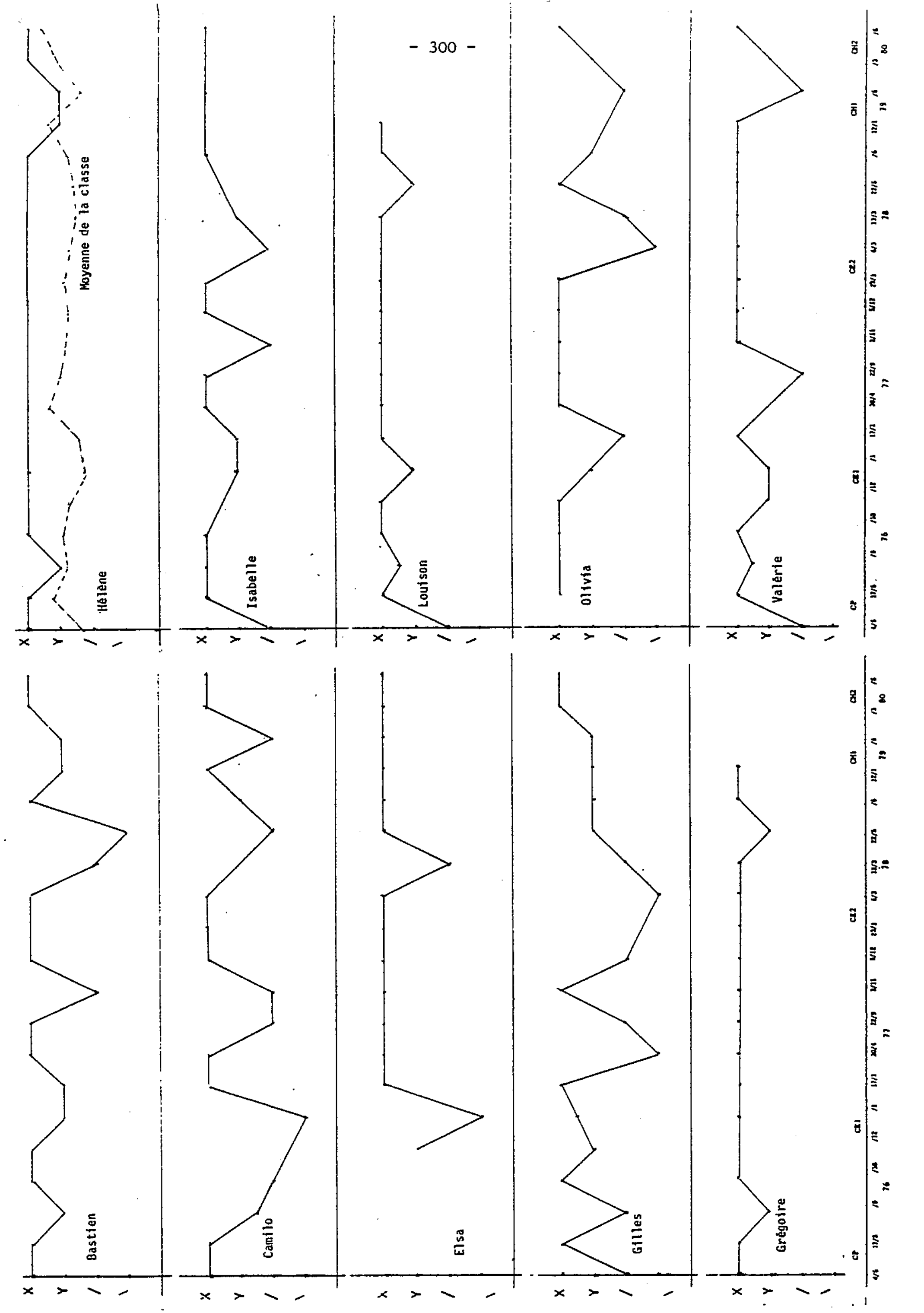
Nous portons en abscisse les différentes épreuves dans l'ordre chronologique et en ordonnée, un barême à 5 valeurs, conformément au code décrit en 1.2 pour les tableaux 1 et 2.

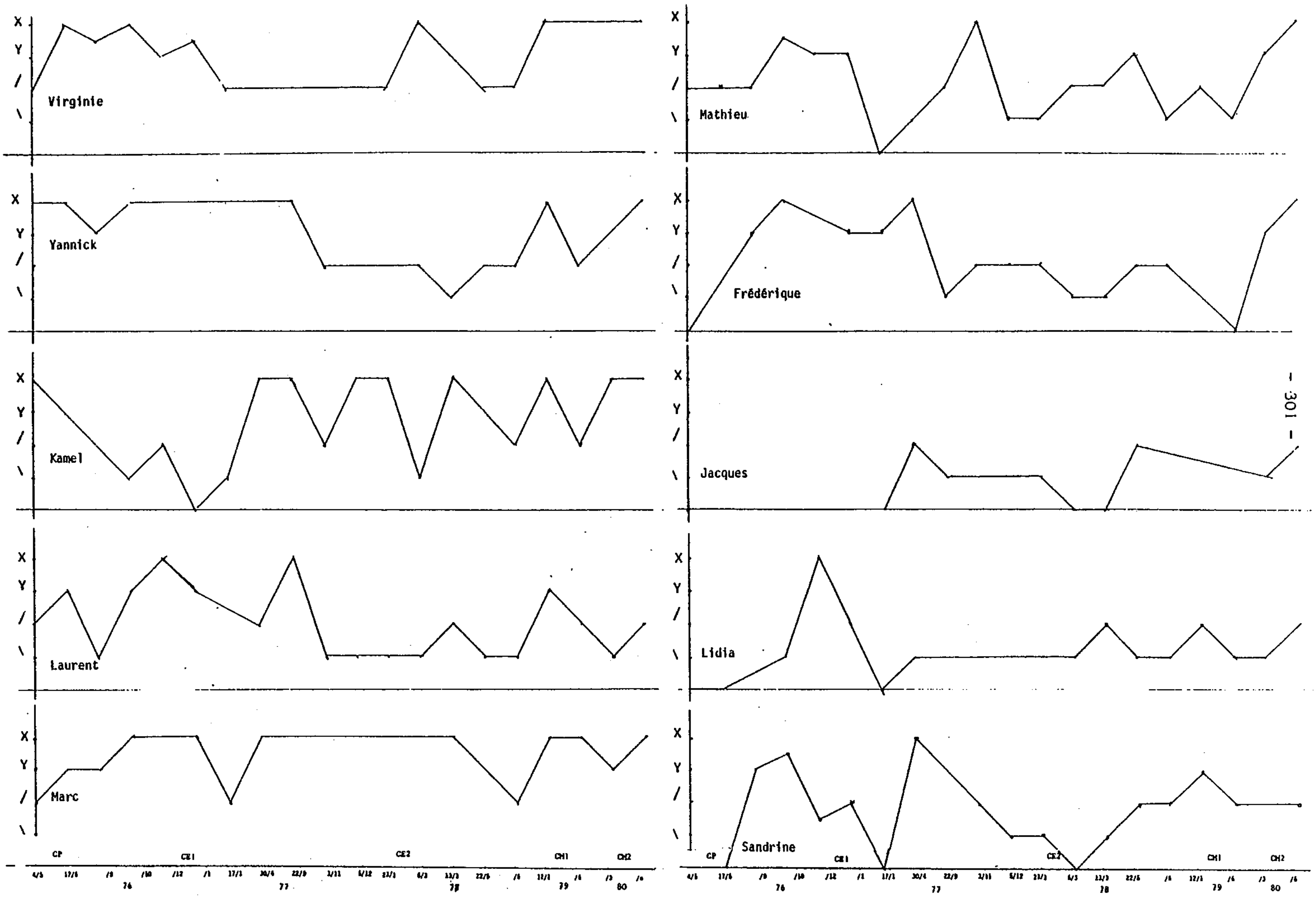
Nous obtenons en tout 20 points.

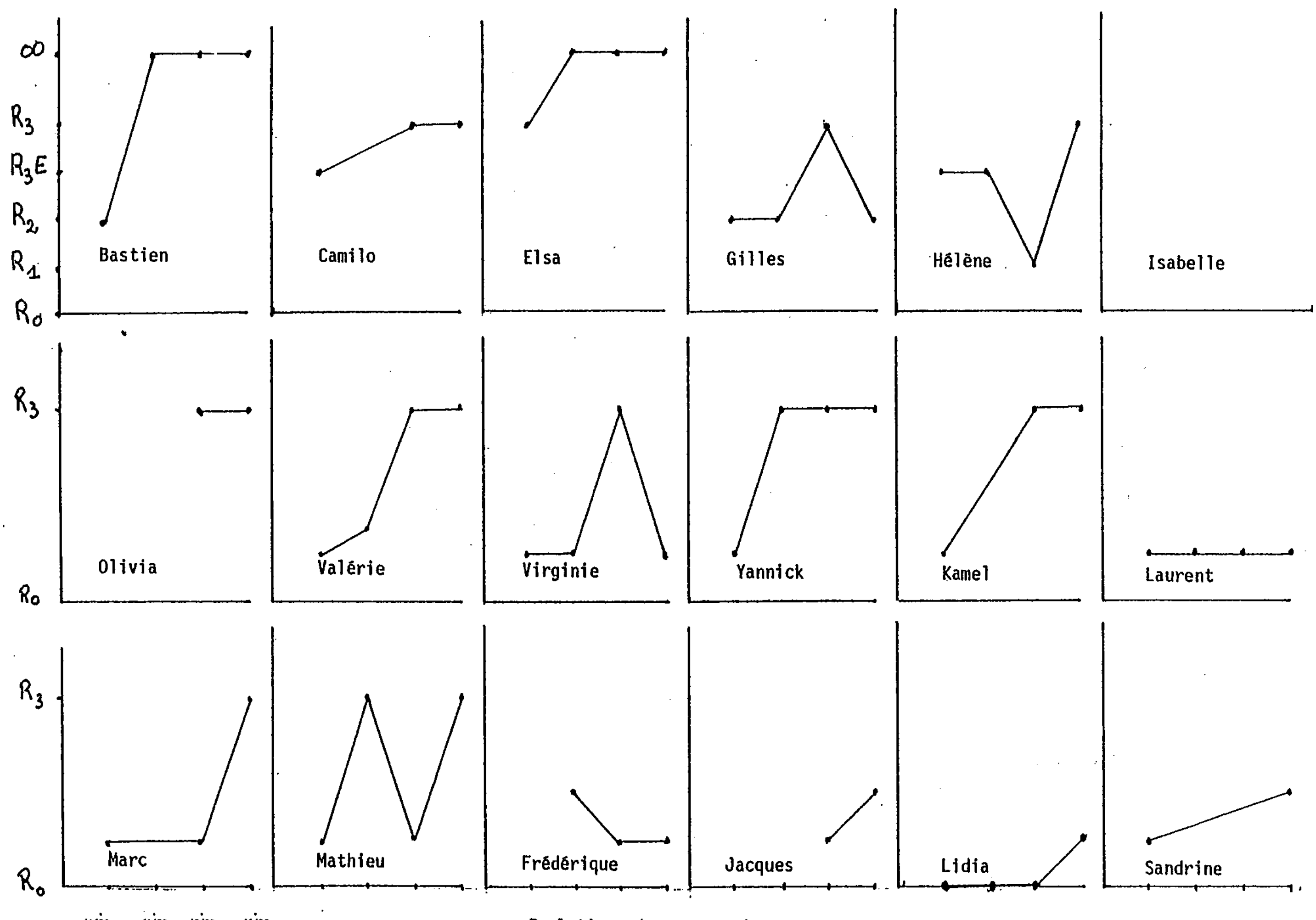
1.3.3- Evolution des conceptions de Janvier 79 à Juin 80. Diagrammes individuels.

Des questions analogues portant sur la densité des nombres décimaux ont été posées en Janvier 79, en Juin 79, en Mars 80 et en Juin 80. Nous recevons ces réponses comme la manifestation des conceptions des élèves vis à vis des nombres décimaux. C'est pourquoi leur évolution nous intéresse. Rappelons toutefois, qu'il a pu y avoir, pour certains, un effet parasite en mars 80. Nous dessinons un diagramme par élève en portant en horizontal les quatre épreuves, en vertical les conceptions : successivement, avec les notations des réponses à la question 2 du 12/1/79, nous notons en allant vers le haut R_0, R_1, R_2, R_3 (E) (qui module la catégorie R_3 par les réponses à la question 3a, de la même épreuve), R_3 et enfin ∞ : la conception de la densité des nombres exprimée par Bastien et Elsa en Juin 79 et confirmée par la suite.

Nous constatons que la majorité des diagrammes sont croissants, que 4 oscillent. Cela traduit bien l'efficacité de notre enseignement (cf IV B 4 : résultats du C M 2 de Sceaux aux épreuves écrites de Juin 80), mais aussi la lenteur avec laquelle les concepts qui relèvent de l'analyse se mettent en place et les aléas dont ils sont l'objet.







Evolutions des conceptions

1.3.4- Conclusion

En fait toutes les évolutions (techniques et conceptuelles) et leur aboutissement se traduisaient déjà assez bien dans l'épreuve de Mars 80 (IV B 3). Nous n'avons cependant pas évalué les acquis concernant les fonctions et les représentations graphiques. Mais il s'agissait là pour nous de cadres de travail. Et en effet, on les voit à l'oeuvre au cours des problèmes posés en entretiens individuels de Juin 78 (IV A 14 et 15) et de façon particulièrement efficace en Juin 80 dans le problème R 41 (IV B 6).

En conclusion, quels que soient les modes d'appréciation des évolutions et des acquis des élèves, nous retrouvons avec une régularité étonnante, les mêmes résultats confirmant en particulier la durabilité des acquis.

2 - CONCEPTIONS DES ELEVES

Introduction

Nous présentons de façon schématique deux conceptions des nombres qui se sont manifestées au cours de l'étude de problèmes imbriquant les cadres géométrique et numérique et qui vont donner lieu à des évolutions cognitives différentes vis à vis du concept de nombre. Les chefs de file de ces deux évolutions sont Bastien et Elsa qui du point de vue conceptuel se retrouvent en fin de C M 2 (Pb T 7 et R 41), après une manifestation spécialement claire de leur différence en juin 1979 à propos de la recherche d'une nombre x tel que $13,5679 < x < 13,568$ (cf. IV B 2)

Reprenons le problème de la recherche d'un carré parmi les rectangles d'aire 27, proposée en C E 2.

. Du point de vue mathématique, ce problème est immédiatement traduit en la recherche d'un nombre $x > 0$ dont le carré $x^2 = 27$. La réponse est oui, $x = \sqrt{27}$.

. Les élèves, eux, traduisent immédiatement le problème en termes de mesures (c'est le sens que lui donne l'énoncé). Et là, deux conceptions se dessinent: les uns vont du continu géométrique implicite soutenu perceptivement, au discret numérique avant de s'engager dans la voie de la construction du continu numérique, soutenus alors par les images géométriques (cf. Bastien), les autres maintenant la correspondance entre grandeurs (longueurs, aires) et mesures dans la limite des nombres connus ont un parcours difficile à faire dans le cadre numérique pour entamer la construction du continu numérique (cf. Elsa)

Reprenons plus précisément la description de ces conceptions.

2.1 - Du continu au discret

Pour les uns, le problème est d'abord géométrique. Les mesures et donc les nombres qui les désignent sont un outil pour manier la géométrie. Dans ce cadre le problème a une solution. Les élèves tiennent leur conviction de l'affirmation d'un principe de valeurs intermédiaires. Citons Bastien : "Je suis sûr qu'il y a un carré, parce que entre 5 et 6 c'est pas le vide, il y a quand même des nombres. Comme 5 x 5 = 25 et 6 x 6 = 36, ça sera obligé. Comme l'aire est entre les deux, eh bien il y aura quelque chose entre les deux. [...] A un moment il va y avoir un côté où ce sera plus petit, et un autre où ce sera plus grand. Alors ce sera au milieu."

Malgré la maladresse d'expression, Bastien met parfaitement en évidence le principe des valeurs intermédiaires pour la fonction $x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[5,6]$.

Cette conviction ne concerne pas isolément le carré d'aire 27 mais est soutenue par une prise en compte de la situation au voisinage. Ainsi un autre élève, soutenant Bastien ajoute "Moi je suis sûre que dans toutes les aires qu'on peut trouver, il y aura toujours un carré, parce qu'il y a des nombres fractionnaires. On mettrait peut-être des jours et des années, mais on en trouverait toujours un."

Ces déclarations sont accompagnées et suivies, au sein de la classe, de propositions de couples (u,v) avec $u^2 < 27$, $v^2 > 27$ et v - u à chaque fois réduit.

Ainsi, pour ces élèves, la conviction d'existence du carré d'aire 27 <u>et</u> un élargissement du problème à la recherche des carrés d'aire proche, de plus en plus proche, constituent un guide pour la recherche et le moteur du progrès. Les élèves qui préjugent d'une solution fractionnaire devront attendre avant d'être confrontés à la contradiction $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Toutefois, la construction du continu numérique est en cours.

Remarquons qu'une suite numérique (u_n, v_n) convergeant vers un a tel que $a^2 = 27$ et dont la construction commence chez certains élèves a une existence propre dans le cadre numérique. Elle n'est nullement conditionnée par la réalisation de l'hypothèse d'existence faite dans le cadre géométrique. Elle pourrait donc être élaborée dans le seul cadre numérique. Mais son élaboration demande alors une mise en relation avec la fonction numérique $x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[5,6]$. C'est pour cela que l'interprétation géométrique est précieuse pour les

élèves auxquels le problème s'adresse. Nous avons vu d'ailleurs, au cours des entretiens sur le problème R 41, que plus que l'hypothèse d'existence de la solution, c'est la recherche d'un mode de variation des variables au voisinage de la solution et la possibilité d'en conjecturer un qui est le moteur de la progression. Son absence est une source de blocage (cf. Olivia, plusieurs élèves de Lakanal).

Nous retrouvons le principe des valeurs intermédiaires à l'oeuvre dans le problème T7 chez ceux qui en manifestent une conception C_1. Ce sont Bastien, Camilo, Gilles, Valérie, Yannick, plus implicitement Laurent. Elsa, mise dans la même classe, est dans une situation différente. Elle s'est bâti une conviction numérique de l'existence d'un x solution de $a \times x = b$ associée à la conviction de la convergence du processus de division de b par a et à la disponibilité d'un algorithme pour fournir des encadrements de plus en plus fins de la solution. De ce point de vue, elle se rapprocherait plutôt des élèves classés en C_2.

Par ailleurs, nous retrouverons aussi à l'occasion du problème T 7, chez Sandrine la source de blocage plus fréquemment rencontrée à Lakanal : comment choisir un point C qui amène, après calcul, à 7 cm^2 d'aire.

2.2 - <u>Du discret au continu</u>

D'autres, comme le mathématicien, traduisent le problème en la recherche d'un nombre a, tel que a x a = 27. Mais contrairement à lui, ils ne disposent pas de l'outil "$\sqrt{\ }$" pour y répondre.

Devant l'échec d'une réponse parmi les entiers et après des tâtonnements numériques, la recherche peut bloquer. (Nous pointons ce fait dans l'analyse des entretiens sur T 7 et R 41.) Il s'agit souvent d'élèves ayant une conception pointilliste des nombres, héritée des entiers : pour ces élèves, tout se passe comme s'il fallait que tout nombre ait un successeur.

La recherche peut aussi déboucher sur la production de couples de nombres (u,v) avec $u^2 < k$, $v^2 > k$, u et v se rapprochant. Nous interprétons cette production comme l'indice d'une organisation de la recherche.

Pour ces élèves, la réponse est nette : si, à un moment, on aboutit à u = v (cela veut dire en un nombre fini de coups) alors le carré existe, sinon, non. Citons la position d'Elsa (en C E 2) à ce propos : "Je crois qu'il y en aura un [carré], dans les fractions. Seulement, je le croirai quand je serai sûre et que j'aurai vérifié". Sa position va d'ailleurs évoluer en 2 ans grâce à un progrès conceptuel du point de vue numérique (cf. pb T 7 et R 41). Olivia déclare, pour sa part : "Il faut un nombre multiplié par le nombre, égal 27." Olivia prenant appui, comme Elsa, essentiellement dans le cadre numérique, va en 2 ans augmenter sa compétence technique, mais ses conceptions numériques vont peu évoluer (cf. Pb T 7 et R 41).

2.3 - Incidence de la représentation graphique

Il y a ceux pour qui la représentation graphique des couples (a,b) vérifiant une relation donnée bénéficie d'un double statut numérique et géométrique importé chacun d'un signifié différent, et chez qui la conviction balance d'une conception à l'autre. La conviction finale est que le problème a une solution, mais on n'en connaît que des mesures approchées (cf. Hélène dans R 41 : après avoir proposé une liste de fourchettes de plus en plus serrées elle arrive à $16{,}23 \times 24{,}77 = 402{,}0171$

$16{,}22 \times 24{,}78 = 401{,}9316$

- Elle n'est plus sûre que le rectangle "402" existe.
- Après construction graphique de la droite support des couples (a,b) tels que a + b = 41 et indication des aires aux points repérés, elle déclare "toute la ligne, c'est des rectangles, le 402 est là", elle marque un point au milieu de sa dernière fourchette et conclut : "Le quadrillage prouve mieux".)

2.4 - Déséquilibre - rééquilibration

Exprimons les comportements des élèves en termes de déséquilibre - rééquilibration dans des problèmes formulés dans le cadre géométrique, mais qui nécessitent, pour les résoudre, l'intervention du cadre numérique (cf. problèmes cités en 2.2 et 2.3).

2.4.1 - . Pour les élèves qui mettent en oeuvre simultanément les 2 cadres - géométrique et numérique - il y a déséquilibre entre leurs convictions issues de la géométrie et leurs compétences numériques et par suite entre le désir et leur possibilité de produire une réponse numérique au problème. Leur effort de rééquilibration consiste à mettre en place une stratégie d'approche de la solution éventuelle, au prix d'une complexification des objets manipulés : une suite ordonnée de couples de nombres. C'est le cas, dès le C E 2, de Bastien, Camilo, Gilles, Mathieu et peut-être d'autres.

2.4.2 - . Les élèves qui transfèrent le problème dans le cadre numérique et travaillent dans ce seul cadre, se répartissent en 3 catégories.

2.4.2.1 - . Ceux pour qui les nombres s'organisent en files : entre 17 et 19, il y a 18 ; entre 17 et 18, il y a 17,1 ; 17,2 ; 17,3 ; 17,4 etc... ; entre 17,3 et 17,4 il y a 17,41 ; 17,42 ; etc... C'est typiquement le cas de Laurent qui en fin de C M 1 produit de la sorte des nombres compris entre 13,5679 et 13,568 en liste mais qui en mars et juin 1980 répond négativement à une question analogue. La seule disponibilité de l'algorithme semble produire une compétence instable. Nous en trouvons la confirmation dans le comportement de Frédérique. Ces élèves répondent correctement à des tâches simples de calcul ou de comparaison de nombres (cf. IV, B 4 - juin 1980 - question 1) mais se retrouvent en échec dès que la complexité augmente (cf. Laurent même épreuve juin 1980 - question 2 ; toutefois Frédérique répond correctement à la question 2, c'est aux épreuves de mars 1980 qu'elle manifeste ses difficultés).

2.4.2.2 . Ceux qui concoivent bien qu'il y a une infinité de nombres décimaux entre 2 nombres fixés, qui disposent d'une bonne technique opératoire mais qui n'ont aucun outil de guidage pour avancer, pour choisir (c'est le cas de Sandrine, Joëlle, Pierre, Shadi... à Lakanal), sont bloqués au moins pour un temps. C'est aussi le cas de Sandrine en C M 2 (cf. Pb T 7) et Olivia (cf. Pb R 41).

Une des issues à ce blocage observée chez des élèves de Lakanal consiste à restreindre les cas numériques à envisager aux valeurs entières (cf. pb rectangle - décembre 1980). Le problème posé se traduit alors par une liste de plusieurs petits problèmes auxquels on peut répondre par oui ou par non. Pour ces élèves, leur connaissance technique n'est d'aucune utilité.

Pour ceux-là, il y a un espoir de créer des déséquilibres en les impliquant dans des situations de communication et des conflits socio-cognitifs avec des "géomètres". Ceci peut être fait à propos de problèmes où on aura besoin de faire varier les données, d'examiner la situation au voisinage de celle proposée à l'étude, où pour cela, il faudra faire varier les données parmi une infinité de valeurs possibles (ou parmi un nombre fini de valeurs, cependant trop grand pour que ces valeurs soient traitées une à une : cf. le problème du coloriage du quadrillage - janvier 1978). La recherche des modes de variation, avec l'aide de représentations adaptées (graphiques en particulier) sont un moyen d'élargir le contexte et de transformer le problème de la recherche d'une réponse exacte en celui de la recherche d'une réponse approchée, puis d'une meilleure et d'une encore meilleure etc... A ce point-là du travail, la compétence technique, numérique et fonctionnelle est un atout précieux. Cette démarche est pour nous un indice de la rééquilibration à l'origine de la construction cognitive.

C'est bien ce que nous constatons chez plusieurs élèves du lycée Lakanal quand nous examinons l'évolution de leurs comportements à un même type de problèmes (pb rectangles - décembre 1980 et juin 1981).

Pour Sandrine et Olivia en C M 2, la rééquilibration semble ne s'être pas encore engagée : Pour Sandrine, nous pensons qu'il s'agit déjà d'insuffisance de prérequis dans la pratique des fonctions. Pour Olivia, c'est différent. Nous savons qu'elle est capable de mettre en oeuvre l'outil fonction ; ici, elle le trouve inadéquat. Contrairement aux autres élèves de Lakanal, elle n'hésite pas à faire de très nombreux calculs, à aucun moment elle ne déclare "on ne peut pas tout calculer". Mais elle a tout de même une très forte exigence de valeur exacte : elle veut, dans le problème T 7 trouver un nombre x "exact" tel que $4,6 \times x = 7$, elle se serait satisfaite toutefois de trouver un résultat périodique ; elle veut trouver, dans R 41, un couple (a,b) "exact" tel que $a + b = 41$ et $a \times b = 402$. Vis à vis de ce type de problème, sa conception, forgée dans le seul cadre numérique, exprimée en C E 2, reste toujours la même 2 ans plus tard. Il lui faudra vraiment attendre la construction des réels.

2.4.2.3 Enfin une autre catégorie d'élèves est constituée par ceux qui conçoivent bien l'existence d'une infinité de nombres décimaux ou fractionnaires et qui sont prêts à considérer le problème posé comme un, parmi un espace de problèmes voisins. Le fait alors de disposer d'un outil - ici l'outil fonction - pour repérer et étudier les relations entre grandeurs ou mesures en jeu et leur mode de variation pour dégager un fil conducteur dans l'immensité des nombres, pour en privilégier certains parmi d'autres, est alors un atout précieux. Pour ceux-là, l'incertitude sur la réponse vient d'une impossibilité technique à maîtriser le processus de convergence. Dans ce cas, la représentation graphique peut être un facteur de déséquilibre et de rééquilibration et entraîner la conviction de pouvoir produire des réponses arbitrairement proches accompagnées ou non de la conviction d'existence de la solution (cf. les élèves du C M 2 qui en R 41 ont douté puis basculé à la suite du graphique. Notons à l'occasion, qu'Elsa qui avait témoigné d'une grande conviction de la convergence du processus de division vers un nombre dans T 7, met en doute la convergence du processus de la suite $(u_n, v_n)_n$ qu'elle commence à construire dans R 41).

2.4.3 La description des conceptions que nous venons de faire suppose qu'on peut établir une correspondance du cadre géométrique vers le cadre numérique. Or cette correspondance ne s'établit pas automatiquement chez tous les élèves.

Plus précisément, dans le cadre géométrique, on doit distinguer 2 pôles : sans mesure et avec mesure.

géométrie

avec mesure ⇄ sans mesure

nombres

Chez la plupart des élèves que nous avons suivis, la correspondance entre ces 2 pôles fonctionne très bien dans les 2 sens au moins implicitement (cf. continu géométrique transporté à la mesure). Le déséquilibre concerne alors la correspondance entre mesures et nombres. Précisons que, pour ces élèves, les longueurs et les aires ont une mesure dès qu'on a choisi une unité. Les nombres connus servent à désigner certaines mesures. Il y en a d'autres qu'on ne sait pas désigner. Ces élèves, dont nous disons qu'ils ont une conception géométrique des nombres, conçoivent que $\frac{b}{a}$ soit un nombre et qu'il désigne le nombre tel que

$a \times \frac{b}{a} = b$. Ils ont une signification à proposer à ce nombre dans un autre cadre : c'est par exemple l'une des dimensions d'un rectangle dont b est l'aire et a l'autre dimension, pour des unités de mesure bien choisies. La division de b par a est un simple procédé technique pour obtenir une écriture décimale, plus commode à manipuler dans les calculs ou dans les représentations. C'est sans doute aussi le cas si $\frac{b}{a}$ désigne l'épaisseur d'une feuille de papier mesurée en mm pour laquelle a feuilles mesurent b mm d'épaisseur [Br. 2].

Pour d'autres élèves, les nombres ont une signification indépendante des mesures de grandeurs continues comme les longueurs ou les aires. La signification est issue du comptage des collections matérielles et reste essentiellement accrochée aux mesures discrètes. Ces élèves peuvent donner de l'existence à certaines mesures de grandeurs continues en transportant à l'aide d'une unité de mesure les nombres connus. Il y a par construction, parfaite correspondance entre les nombres et la mesure. C'est le comportement manifesté par Lidia en décembre 1978, ou dans certaines séances par Laurent. En revanche il peut y avoir décalage entre les longueurs par exemple, et les segments qui ont une mesure. C'est ce qui semble être le cas pour Laurent dans le problème T 7 qui affirme l'existence de la hauteur cherchée entre 2 autres mais qui ne peut rien faire pour avancer numériquement dans le problème. Sandrine, Jacques, Lidia font agir, lorsqu'elle est sollicitée, la correspondance entre mesures et nombres : celle-ci est conceptuelle men' sans déséquilibre pour eux. La question de la rééquilibration ne se pose pas. Si on veut faire jouer un déséquilibre, il faut sans doute jouer entre les segments géométriques et les longueurs mesurables. De ce point de vue, il nous a paru plus fructueux de travailler sur les aires plutôt que sur les longueurs [cf. Brochure Irem, Longueurs - aires R. DOUADY - M.J. PERRIN].

D. Conclusion du chapitre IV

Nous venons de voir que pour la plupart des élèves, le modèle implicite de la mesure est le continu géométrique perceptif. La construction des premiers nombres elle, est nécessairement pointilliste, (issue du comptage des objets matériels). Le continu numérique ne trouve sa réalisation qu'avec la construction des réels. L'élève qui bénéficie d'une forte conviction du continu géométrique, va se trouver en déséquilibre entre sa conviction et ce qu'il sait faire avec les nombres.

Les problèmes et jeux de cadres que nous proposons ont pour objectif de donner à ce type d'élèves les moyens de se rééquilibrer progressivement, en étendant le champ numérique. Chez les autres, ils ont pour rôle, au sein de situations didactiques appropriées, de créer les conditions d'un déséquilibre en forçant la conception géométrique, de façon à pouvoir engager un processus de rééquilibration. Pour tous, le projet est de les aider à évoluer d'une conception pointilliste des nombres à une conception topologique opératoire.

Revenons alors sur les échecs de Jacques et Lidia, sur les difficultés de Frédérique, Laurent et Sandrine. Ce sont pour nous, à la fois, une confirmation de nos hypothèses et peut-être la marque de l'insuffisance de leur réalisation. Ces élèves n'ont pas enclenché de dynamique (ou pas de façon stable chez Laurent et Frédérique). Pour qu'une telle dynamique soit possible, l'élève a besoin de disposer, dans chacun des registres qu'il va solliciter, d'un seuil de connaissances sur lesquelles s'appuyer. Ce seuil n'était sans doute atteint pour aucun des cadres ni chez Jacques, ni chez Lidia. Ces élèves n'ont pu accrocher que quelques algorithmes: ils savent faire des additions, des soustractions*, comparer

*Ainsi, une compétence technique pure, sans appui sémantique, est inutilisable (cf. IV B 2, la soustraction de Lidia).

des nombres d'expression simple. Pour les autres, le seuil était vraisemblablement atteint dans le cadre numérique, mais non dans le cadre purement géométrique. Par ailleurs, ils n'ont pas réussi comme Elsa à avancer suffisamment dans un seul cadre (ici, le numérique).

Tout cela nous amène à penser que c'est sans doute dans la constitution de concepts purement géométriques que notre projet a été insuffisant. En effet, nous avons bien prévu une étude des longueurs, mais elle s'est développée très tôt, au CP . Nous avons prévu une étude géométrique du rectangle (II 4 3), mais nous avons très vite identifié les aires de rectangles à leurs mesures. Nous avons bien organisé la différenciation longueur-aire, mais en recourant essentiellement à l'étude de leurs variations numériques respectives de deux manières:

- dans le cadre matériel, en recourant à l'observation: par exemple, en comptant les carreaux à l'intérieur de figures rectangulaires, dessinées sur papier quadrillé, ayant toutes même longueur de bord, ou bien ayant une dimension commune (l'autre variant), ou bien aussi en comparant deux rectangles dont l'un est 3 fois plus long et 2 fois plus large que l'autre (et variantes).
- dans le cadre numérique, en étendant par le calcul, les résultats des observations précédentes, en particulier en pointant entre dimensions et aires de rectangles, les relations $(a,b) \longmapsto A = a \times b$

$(a, n \times b) \longmapsto n \times A$, $(p \times a, q \times b) \longmapsto (p \times q) \times A$

Ainsi, $(3 \times a, 3 \times b) \longmapsto 9 \times A$, alors que $(3 \times a) + (3 \times b) = 3 \times s$, où s est le demi-périmètre du rectangle. Ces relations sont mises en oeuvre d'abord pour des valeurs numériques entières, puis pour des valeurs fractionnaires en relation avec le pavage.

Nous avons compté sur la représentation graphique des relations mises en oeuvre et sur le support géométrique implicite de cette représentation, pour créer la dynamique entre les deux cadres géométrique et numérique. Tout cela a suffi pour la majorité des élèves, non pour tous.

Nous avons élaboré depuis, une suite de séquences dont un des objectifs est de se constituer un corpus de base en géométrie [Dou-Per] , plus précisément, pour la notion d'aire. Il s'agit de s'appuyer sur le comptage des carreaux d'une surface pavée, mais aussi de dépasser ce comptage (en recourant à un découpage de la surface pavée et à un recollement convenable des morceaux, pour obtenir des surfaces non pavables mais auxquelles on sache attribuer un nombre de carreaux). Il s'agit aussi de situer la notion d'aire par rapport à celle de masse et à celle de longueur. L'objectif est ensuite de s'appuyer sur la conception de l'aire ainsi développée pour étendre, en dialectique avec elle, la mesure, et élargir de la sorte le comptage des carreaux en l'englobant dans une réorganisation de la notion de mesure. On pourrait sans doute employer la même démarche pour le concept de volume, pour ceux de durée, vitesse... , le cadre d'origine étant la physique.

Revenons, pour finir, sur l'antériorité des acquisitions conceptuelles sur les acquisitions techniques et la réussite.

Nous avons longuement expliqué que notre enseignement est basé sur la recherche de problèmes tels qu'on ne dispose pas de tous les outils (en particulier techniques et algorithmiques) pour les résoudre, et que ceci est un moteur de l'acquisition et de la réussite. Ainsi, le 17/1/77 (II 3 4 3) on devrait utiliser la division euclidienne, on ne l'a pas. Le 5/12/77 (IV A 5), c'est le calcul de l'aire d'un rectangle, dont les dimensions sont fractionnaires, qui est à faire à un moment où on ne connaît pas la multiplication sur les fractions, pour ne prendre que ces deux exemples. On devrait donc constater que, malgré une certaine antériorité des concepts sur la technique, nos élèves réussissent à résoudre des problèmes relevant d'une technique qu'ils n'ont pas. C'est ce que nous avons vérifié (dans le paragraphe précédent) pour un grand nombre de nos élèves. Il y a peut-être là, en germe, une hypothèse plus générale d'antériorité des concepts sur la technique (au sens large) à respecter dans l'enseignement (peut-être d'ailleurs ni pour tous les élèves, ni pour tous les concepts), mais nous ne nous sommes pas encore donné les moyens d'élucider cette question.

CONCLUSION

Notre projet était de tester des hypothèses cognitives sur l'apprentissage des mathématiques en situation scolaire (à l'école primaire). Par apprentissage, nous entendons qu'il y ait, chez l'élève, construction d'un savoir susceptible d'évolution et d'adaptation, appropriation de connaissances qui permettent de résoudre des problèmes, et aussi que le savoir construit ait un caractère social, c'est-à-dire qui permette la communication et l'argumentation.

Pour cela, nous avons dû repenser le découpage du savoir mathématique choisi pour être enseigné dans le cursus primaire, ainsi que son organisation en une genèse artificielle. En somme, nous avons dû repenser la relation ternaire maître-élève-savoir (cf. I , incertitudes).

Nous avons en premier lieu choisi d'exploiter la longue durée : les 5 années du cursus. Cette longue échelle de temps nous a assuré la marge de manoeuvre dont nous avions besoin pour faire jouer les changements de cadres et le caractère implicite-explicite des outils mathématiques dont nous visions l'apprentissage (avant leur institutionnalisation et leur usage courant) et aussi pour créer des habitudes.

Rappelons que nous avons bénéficié de conditions propices de réalisation (cf. Introduction).

Nous pensons avoir montré que les jeux de cadres et les dialectiques outil-objet qu'ils permettent d'enclencher peuvent être, sur le plan cognitif, des instruments didactiques à la disposition de l'enseignant pour l'aider à remplir sa tâche. Ces instruments sont, avec ceux fournis par la théorie des situations de Guy Brousseau, à la fois transverses et complémentaires. En particulier, ils donnent à l'enseignant des moyens d'intégrer dans la constitution du savoir commun de la classe certaines différences entre élèves. En effet, celles-ci se manifestent à travers la diversité des activités et des productions. Or, d'une part les possibilités, pour l'élève, de changements de cadres en permettent l'expression , d'autre part les jeux de cadres organisés par le maître, en particulier l'explicitation des relations entre cadres, en phase de confrontation collective (rappels ou bilans) en permettent la diffusion dans la classe. Ainsi, les conditions d'un débat et d'un recentrage des idées sont créées. (Ces situations ne correspondent pas nécessairement aux situations de validation de Guy Brousseau : elles laissent une part au contingent, à l'initiative du maître pour éviter les blocages et faciliter la diffusion). Il est possible alors d'assurer soit la reconnaissance du bien fondé, soit le rejet argumenté des différents points de vue exprimés et de s'appuyer sur cette confrontation pour étendre les relations partielles entre cadres. Cela n'aboutit pas à l'uniformité des conceptions, comme on l'a vu à l'occasion de la recherche de nombres compris entre 2 nombres donnés [cf. IV B] ou sur les problèmes T7 et R41 [cf. IV B]. Toutefois, si les changements de cadres sont apparemment possibles, pour la grande majorité des élèves, par le choix des problèmes, ils ne sont pas toujours effectifs pour tous [cf. IV]. Rappelons que nous **pointons** [cf. IV] que concepts et techniques avancent en général ensemble en s'épaulant mutuellement dans une dynamique intercadres avec une légère antériorité des concepts, du moins pour nos choix didactiques.

Dans les cas d'échec, notre interprétation est que nous n'avons pas créé les conditions suffisantes de démarrage de la dynamique. En particulier, les élèves en échec ne disposaient pas des connaissances minimales nécessaires dans chacun des cadres sollicités, plus précisément ici dans le cadre géométrique.

La question cruciale pour l'enseignant est en fin de compte une question de <u>temps</u>. Nous avons expérimenté notre projet actuel auprès d'élèves en CM1 - CM2. Leurs conceptions du point de vue des aires répondent à peu près à nos attentes. Mais nous n'avons pas eu le temps de développer les cadres graphique et fonctionnel comme nous le souhaitions. Pour le moment, les jeux de cadres et dialectiques fonctionnent, mais sur un champ numérique moins étendu que nous ne le voudrions. (Cela argumente notre hypothèse selon laquelle le cadre graphique et le cadre fonctionnel prennent le relais du cadre matériel pour étendre les notions.)

C'est dire qu'un tel projet ne peut se concevoir que sur un long terme dépassant le cursus de l'école primaire. Notre projet, en ce qui concerne les contenus étudiés peut trouver son efficacité dans une perspective sur toute la durée de l'école obligatoire.

Toutefois, il reste une grande interrogation concernant le découpage et la gestion du temps scolaire. L'organisation que nous proposons est en effet difficile à réaliser pour le maître (cf. I, Incertitudes) mais elle est réalisable à l'école primaire. Un certain nombre de facteurs lui sont favorables. Nous en relevons trois importants et qui agissent en sens inverse à l'école primaire et au collège (enseignement secondaire). Il s'agit de la contrainte des plages horaires, de celle des programmes et de l'évaluation des élèves.

En effet, à l'école primaire, le maître bénéficie d'une certaine marge de manoeuvre sur la longueur des plages horaires et sur leur répartition dans la semaine. Il peut les adapter et les faire un peu varier au fil des nécessités didactiques ou au moins de ce qui serait souhaitable. Par ailleurs, le programme est peu contraignant dans sa forme, même si le contenu peut paraître lourd : il est prévu pour 2 années, au moins en CE et en CM. Cela permet une raisonnable liberté d'organisation. L'évaluation des élèves est plutôt indicative et globale ; elle sert au maître de repère : elle n'est pas une condition pour le passage au niveau supérieur, sauf peut-être pour l'entrée en 6ème.

Au contraire, dans le secondaire (1er ou 2ème cycle) les contraintes de l'institution sont beaucoup plus grandes : les tranches horaires ont en principe une durée rigide (55 minutes réduites souvent du temps consacré à des changements de salle), elles sont pour une discipline donnée attribuées de façon fixe dans la semaine. De plus le programme est fait année par année et entre plus dans le détail. Les notes sont l'élément de référence pour comparer le travail des élèves dans les différentes disciplines et compenser, en principe, la diversité des intervenants pédagogiques.

Cette différence provient en premier lieu, bien sûr, du fait qu'il y a un maître (ou quelquefois deux) pour une classe à l'école primaire et un par discipline au collège. Mais par ailleurs, le contenu à dispenser dans le secondaire exige un bon niveau de formation dans la discipline et donc une spécialisation. A notre avis, ces deux contraintes contradictoires ne peuvent trouver de solution que dans la notion d'équipe pédagogique. Des expériences dans ce sens [ESE] ont montré la fécondité de ce mode de travail, mais aussi les difficultés de réalisation. Le problème reste ouvert.

A l'Université, au moins une partie de l'enseignement pourrait s'organiser de manière à provoquer des dialectiques outil-objet au sein de jeux de cadres appropriés. L'expérience math-physique de l'Université de Paris 7 en est un essai à grande échelle. [Ar. 1].

Signalons que l'informatique est en train d'offrir aux enseignants un cadre susceptible d'entrer dans des jeux de cadres qui peuvent se révéler très efficaces du point de vue de l'apprentissage. Ce cadre peut cependant rester stérile tout en faisant illusion, s'il est seulement juxtaposé et étranger aux autres. Par exemple, la situation didactique de l'élève sera complètement différente si l'élève seul doit répondre à la demande de l'ordinateur ou si l'ordinateur est aussi capable d'entrer en dialogue argumenté avec l'élève [Hub.]. Peut-être y a-t-il là une bonne occasion de reconsidérer le rôle du temps. Mais il y a de nombreuses recherches à faire.

De façon générale, nous pensons que les principes à l'oeuvre dans l'organisation de l'enseignement que nous proposons doivent pouvoir servir de trame à une grande partie des apprentissages à tous les niveaux. Ce sont même des instruments vraisemblablement bien adaptés pour pouvoir tenir compte de l'introduction massive probable des ordinateurs dans les établissements scolaires (cf. jeux de cadres).

APPENDICE

DEUX EXEMPLES DE JEUX DE CADRES

dans la recherche actuelle en mathématiques.

INTRODUCTION.

Les jeux de cadres dont nous avons décrit un fonctionnement possible à l'école élémentaire sont le pain quotidien du mathématicien.

Citons à ce sujet K.G. Wilson (en l'occurence un physicien) dans un rapport de prospective*.

"Il est hautement désirable que certains chercheurs maintiennent deux ou trois spécialités parmi les problèmes que j'ai mentionnés et pas seulement une, de façon qu'ils facilitent le processus de fertilisation croisée et qu'ils évitent de s'enliser dans un problème unique. Dans mes premiers travaux sur le groupe de renormalisation, j'ai fait tourner mes efforts entre trois problèmes différents, deux venant de la physique des particules élémentaires et un des phénomènes critiques. Je me suis souvent trouvé bloqué en travaillant sur un de ces problèmes. Dans ce cas, je tranférais mes idées les plus récentes vers un autre de ces trois problèmes. Sans ces tranferts fréquents j'aurais fait bien peu de progrès dans mon travail".

Ces jeux de cadres interviennent sur des échelles allant de la démonstration d'un lemme à une théorie entière, voire à l'effort de toute une communauté de mathématiciens dans une branche (comme c'est le cas dans le premier exemple que nous présentons). Ils peuvent prendre deux formes : transfert de concepts ou de plans de démonstration par analogie, ou correspondance (imparfaite) de problèmes avec création et transfert de résultats.

Nous analysons du point de vue des jeux de cadres deux exemples choisis entre beaucoup dans les mathématiques actuelles, l'un en raison de son caractère spectaculaire et du nombre de mathématiciens qu'il a occupés, l'autre parce qu'il est tout proche. Ils sont typiques chacun d'un des deux fonctionnements décrits ci-dessus. Il s'agit de :

I. La conjecture de Mordell (Exposé Szpiro, Sém. Bourbaki, 1983)

II. L'étude combinatoire des propriétés dynamiques des polynômes complexes de degré 2 [A.Douady et H.Hubbard, prépublication Orsay 1984].

---

* Kenneth G.Wilson (Newman Laboratory, Cornell University) : Theoretical Science in the coming decades, preprint (Cornell, Ithaca, N.Y. USA).

I. *La conjecture de Mordell.*

INTRODUCTION.

Cet énoncé conjecturé en 1922 par Mordell a été démontré en 1983 par Faltings. Plus précisément, celui-ci a posé une sorte de clé de voûte à une construction extraordinairement savante élaborée au cours de ces 60 années par un grand nombre de mathématiciens. L.Szpiro a présenté un plan de la démonstration de ce théorème au Séminaire Bourbaki en Novembre 1983. Nous retenons de son exposé un aspect sur lequel il a lui-même insisté (surtout dans son exposé oral) et que nous allons essayer de présenter ici : l'importance du travail parallèle sur plusieurs cadres, la fécondité des transferts de cadres et la façon dont ils ont joué.

I.1. *Présentation d'une forme de la conjecture de Mordell.*

Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ un polynôme irréductible.

Soit $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 , f(x,y) = o\}$ la courbe algébrique des zéros de f. On associe à Γ un entier qu'on appelle son genre de la façon suivante : soit $\overline{\Gamma}$ la fermeture de Γ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et $\tilde{\overline{\Gamma}}$ la surface de Riemann obtenue en désingularisant $\overline{\Gamma}$; (comme $\tilde{\overline{\Gamma}}$ est de dimension 1 sur $\mathbb{C}$, donc 2 sur $\mathbb{R}$, on en parle comme d'une courbe complexe ou d'une surface de Riemann suivant qu'on la regarde d'un point de vue algébrique ou topologique).

La surface $\tilde{\overline{\Gamma}}$ est compacte connexe donc homéophorme à un tore à g trous. L nombre g est le genre de Γ. Il y a un moyen algébrique de calculer g connaissant f, le nombre et le type de singularités. Par exemple, si $\tilde{\overline{\Gamma}}$ n'a pour singularité que les points doubles à tangentes distinctes alors $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - r$ où d est le degré de f et où r est le nombre de singularités.

Nous allons énoncer avec les notations ci-dessus le théorème (Γ) : conjecture de Mordell, démontrée par Faltings.

Théorème (Γ) : Si f est à coefficients entiers et si $g \geqslant 2$, alors Γ a un nombre fini de points rationnels.

Remarques :

1) Le théorème (Γ) est en relation avec la conjecture dite "théorème de Fermat" qui est la suivante :

Soit $\Gamma_n = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 , x^n + y^n = 1\}$, alors $\forall n \geqslant 3$ $\Gamma_n \cap \mathbb{Q}^2$ est réduit aux solutions triviales*.

Ici, $\overline{\Gamma}_n$ n'a pas de singularité. Son genre est $g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Pour $n > 3$, on a $g \geqslant 2$. Le théorème (Γ) dit que $\Gamma_n \cap \mathbb{Q}^2$ est fini.

Pour un grand nombre de valeurs de n, on sait démontrer par d'autres moyens qu'il est réduit aux solutions triviales.

2) Formellement, les 2 énoncés ci-dessus, théorème (Γ) et conjecture de Fermat sont élémentaires, sauf la définition du genre. En fait, ils ne le sont pas du tout, mais les difficultés sont masquées par la simplicité de la formulation. Il se trouve que l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers apparemment d'un abord simple rassemble des difficultés de diverses natures. Une manière d'aborder les problèmes impliquant $\mathbb{Z}$ est d'essayer d'isoler les difficultés. Cela va passer par des changements de cadres et des jeux de cadres. C'est ce qu'a pointé Szpiro dans son exposé.

3) En fait, Faltings démontre un énoncé plus général, en remplaçant $\mathbb{Q}$ par un corps de nombres (extension finie de $\mathbb{Q}$).

I.2. *Jeux de cadres.*

Le moteur fondamental est le suivant : $\mathbb{Z}$ est un anneau principal. L'anneau $\mathbb{C}[T]$ des polynômes en une variable à coefficients dans $\mathbb{C}$ est aussi un anneau principal. De ce fait, on pourra transporter à $\mathbb{C}[T]$ des problèmes sur $\mathbb{Z}$. L'avantage est que tout problème algébrique concernant $\mathbb{C}[T]$ est susceptible d'une interprétation géométrique. Mais $\mathbb{C}$ est un corps de caractéristique 0. Certaines des difficultés de $\mathbb{Z}$ ressemblent plutôt à des difficultés de l'anneau $K[T]$ où K est un corps fini donc de caractéristique $p > o$.

---

* si n impair, $\{(o,1),(1,o)\}$
si n pair , $\{(o,1)(o,-1)(1,o)(-1,o)\}$

Ainsi, l'étude de $\mathbb{Z}$ ne peut être fructueuse qu'en dialectique avec celles de $\mathbb{C}[T]$ et $K[T]$. Autrement dit, le travail se fait en parallèle dans 3 cadres:

- Théorie des nombres - Géométrie diophantienne. L'anneau de base est $\mathbb{Z}$, ou plus généralement l'anneau des entiers d'un corps de nombres.
- Géométrie algébrique complexe. L'anneau de base est $\mathbb{C}[T]$, ou un anneau de fonctions sur une courbe algébrique complexe.
- Géométrie algébrique sur un corps fini.

Notons que la géométrie algébrique sur $\mathbb{C}$ reçoit beaucoup d'inspiration via la géométrie analytique de la topologie. Les concepts issus de la topologie peuvent être formulés en termes algébriques, puis transférés en théorie des nombres. Weil, Zariski, Serre et Grothendieck ont systématisé cette approche. Le langage des schémas permet de présenter les énoncés correspondants dans les 3 cadres ci-dessus comme 3 cas particuliers d'un même énoncé.

I.3. *Relations entre les cadres* $\mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{C}[T]$

On peut établir un "dictionnaire" entre les éléments de l'un et de l'autre. Donnons des exemples :

$\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}[T]$
$f \in \mathbb{Z}[X,Y]$	$f \in \mathbb{C}[T][X,Y] = \mathbb{C}[T,X,Y]$
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{C}(T)$
$(x,y) \in \mathbb{Q}^2$	$(\xi,\eta) \in (\mathbb{C}(T))^2$
$\Gamma=\{(x,y) \in \mathbb{C}^2, f(x,y)=0\}$	$\Sigma = \{(t,x,y) \in \mathbb{C}^3, f(t,x,y)=0\}$
$\Gamma(Q) = \Gamma \cap \mathbb{Q}^2$	$\mathcal{S}_{rat}(\Pi) = \{(\xi,\eta) \in (\mathbb{C}(T))^2 ,\ f(t,\xi(t),\eta(t)) = 0\}$

Autrement dit, à un point $M \in \Gamma \cap \mathbb{Q}^2$ dans le cadre de $\mathbb{Z}$ correspond une courbe $\Xi \subset \Sigma$ qui est le graphe d'une application $t \mapsto (\xi(t), \eta(t))$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^2$ où ξ et η sont des fractions rationnelles (donc pas définies partout). Le problème correspondant à la conjoncture de Mordell dans le cadre de $\mathbb{C}[T]$ amène à étudier la situation suivante :

Soit Σ une surface algébrique de $\mathbb{C}^3$ munie de la projection $\Pi : (t,x,y) \longmapsto t$ de Σ sur $\mathbb{C}$. On considère l'ensemble des courbes $\sqsupset \subset \Sigma$ qui sont les graphes d'applications rationnelles de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^2$, autrement dit, les images des sections rationnelles de Π. Posons $\mathcal{S}_{rat}(\Pi) = \{$sections rationnelles de $\Pi\}$. Compter les points de $\Gamma \cap \mathbb{Q}^2$ dans le cadre de $\mathbb{Z}$ correspond à compter les points de $\mathcal{S}_{rat}(\Pi)$ dans le cadre de $\mathbb{C}[T]$. Il reste à traduire l'hypothèse sur le genre de Γ pour énoncer une traduction de la conjecture.

Remarque. Il y a entre les 2 cadres un décalage de dimension : ainsi à un point de Γ correspond une courbe de Σ. Ce fait va être exploité de façon intéressante.

Genre de Σ : la définition du genre de Γ supposait un plongement $\iota : Z \hookrightarrow \mathbb{C}$. On dispose de beaucoup d'applications de $\mathbb{C}[T]$ dans $\mathbb{C}$. Ce sont les applications $\delta_t : \varphi \longmapsto \varphi(t)$ pour $t \in \mathbb{C}$. Soit f un polynôme en X,Y à coefficients dans $\mathbb{C}[T]$. Pour $t \in \mathbb{C}$ choisi, on obtient un polynôme $f_t \in \mathbb{C}[X,Y]$ en évaluant chaque coefficient de f en t. L'ensemble des zéros de f_t est une courbe $\Sigma(t)$ dans $\mathbb{C}^2$ qui n'est autre que la fibre $\Pi^{-1}(t)$ de Π au dessus de t ; la courbe $\Sigma(t)$ a un genre $g(t)$. Quand t varie, $g(t)$ a une valeur générique $g_\Pi(\Sigma)$ qu'on appelle genre de (Σ,Π).

Hypothèse 1. Pour énoncer la conjecture de Mordell, il faut poser l'hypothèse $g_\Pi(\Sigma) \geq 2$.

Avec cette seule hypothèse, il y a un contre exemple évident à $\mathcal{S}_{rat}(\Pi)$ fini. Il est obtenu en prenant $\Sigma = \mathbb{C} \times \Gamma$ où Γ est une courbe dans $\mathbb{C}^2$, et $\Pi : \Sigma \to \mathbb{C}$ est l'application 1ère coordonnée. Alors les graphes des fonctions constantes de $\mathbb{C} \to \Gamma$ sont des sections $\in \mathcal{S}_{rat}(\Pi)$ et il y en a une quantité non dénombrable. Mais dans ce cas, les fibres sont toutes isomorphes. L'hypothèse à mettre est la suivante :

Hypothèse 2. Pour presque tout couple $(t,t') \in \mathbb{C}^2$, les compactifiés désingularisées $\tilde{\Sigma}(t)$ et $\tilde{\Sigma}(t')$ de $\Sigma(t)$ et $\Sigma(t')$ respectivement ne sont pas isomorphes.

Théorème (Σ) (analogue en géométrie algébrique de la conjecture de Mordell)

Sous les hyptohèses 1 et 2 ci-dessus, $\# \mathcal{S}_{rat}(\Pi) < +\infty$

Ce théorème a une formulation en géométrie analytique. Le théorème G A G A de Serre exprime d'ailleurs les conditions d'identification des deux cadres : géométrie algébrique et géométrie analytique.

Le théorème (Σ) a été démontré (1965) en géométrie analytique par Manin qui est un algébriste. Quelques mois plus tard, Grauert, géomètre analytique, en fait une démonstration algébrique. Pour l'un, comme pour l'autre la référence à la conjecture de Mordell est évidente. Grauert y réfère même explicitement dans le titre de sa publication. Samuel, exploitant la démonstration de Grauert, démontre un théorème analogue en remplaçant $\mathbb{C}[T]$ par $K[T]$ où K est la clôture algébrique d'un corps fini.

Reprenons le théorème (Σ) en généralisant un peu la situation : Soit Σ une surface algébrique qu'on suppose compacte, munie d'une projection $\Pi : \Sigma \to S$ où S est une courbe sur $\mathbb{C}$, compacte.

Théorème : Sous les hypothèses 1 et 2 (genre $g \geq 2$ et non isomorphisme des fibres), alors $\mathcal{S}_{rat}(\Pi)$ est fini.

Remarque : Si Σ est plongeable dans un espace projectif de grande dimension, on peut aussi bien travailler en géométrie algébrique qu'en géométrie analytique.

I.4. *Où intervient la construction de Parshin*.

Pour démontrer le théorème, on opère deux modifications de l'énoncé par l'introduction d'un ensemble $\text{Ш}(S,\Delta,g)$ et par la réduction de Torelli. On va les exprimer en géométrie analytique mais elles peuvent se recopier immédiatement en géométrie algébrique sur $\mathbb{C}$, donc dans le cadre $\mathbb{C}[T]$. Elles se traduisent, avec des précautions, à $K[T]$. Elles se traduisent aussi dans le cadre de $\mathbb{Z}$, avec des précautions et des énormes difficultés ; mais le résultat est fructueux.

L'ensemble $\text{Ш}(S,\Delta,g)$.

On se fixe une courbe S analytique. On se fixe un ensemble fini $\Delta \subset S$ et on se fixe un nombre g.

On définit $\text{Ш}(S,\Delta,g)$ de la façon suivante :

On considère l'ensemble des couples (Σ,Π) où Σ est une surface complexe compacte munie d'une projection $\Pi : \Sigma \to S$ analytique et propre. On fait les hypothèses suivantes :

$\forall\, x \in \Sigma - \overset{-1}{\Pi}(\Delta)$ on a

. Σ lisse en x (i.e sans singularité) et Π est une submersion en x

. $\forall\, s \in S - \Delta$, $\overset{-1}{\Pi}(s)$ est de genre g

. $\exists$ s et s' , $\overset{-1}{\Pi}(s) \not\cong \overset{-1}{\Pi}(s')$

Mais l'ensemble des couples (Σ,Π) ainsi défini est trop gros. On voudrait ne pas distinguer deux surfaces isomorphes au dessus de S. Cette relation d'équivalence n'est pas suffisante. On en met une plus grossière qui s'exprime ainsi : $(\Sigma,\Pi) \sim (\Sigma',\Pi') \Longleftrightarrow \exists\, \Sigma'', \Pi''$ et

$$\begin{tikzcd} & \Sigma'' \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\varphi'"] \arrow[dd, "\Pi''"] & \\ \Sigma \arrow[dr, "\Pi"'] & & \Sigma' \arrow[dl, "\Pi'"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif tel que φ et φ' soient des isomorphismes au dessus de $S - \Delta$.

Ш(S,Δ,g) est le quotient de "l'ensemble" des couples (Σ,Π) par la relation d'équivalence ci dessus.

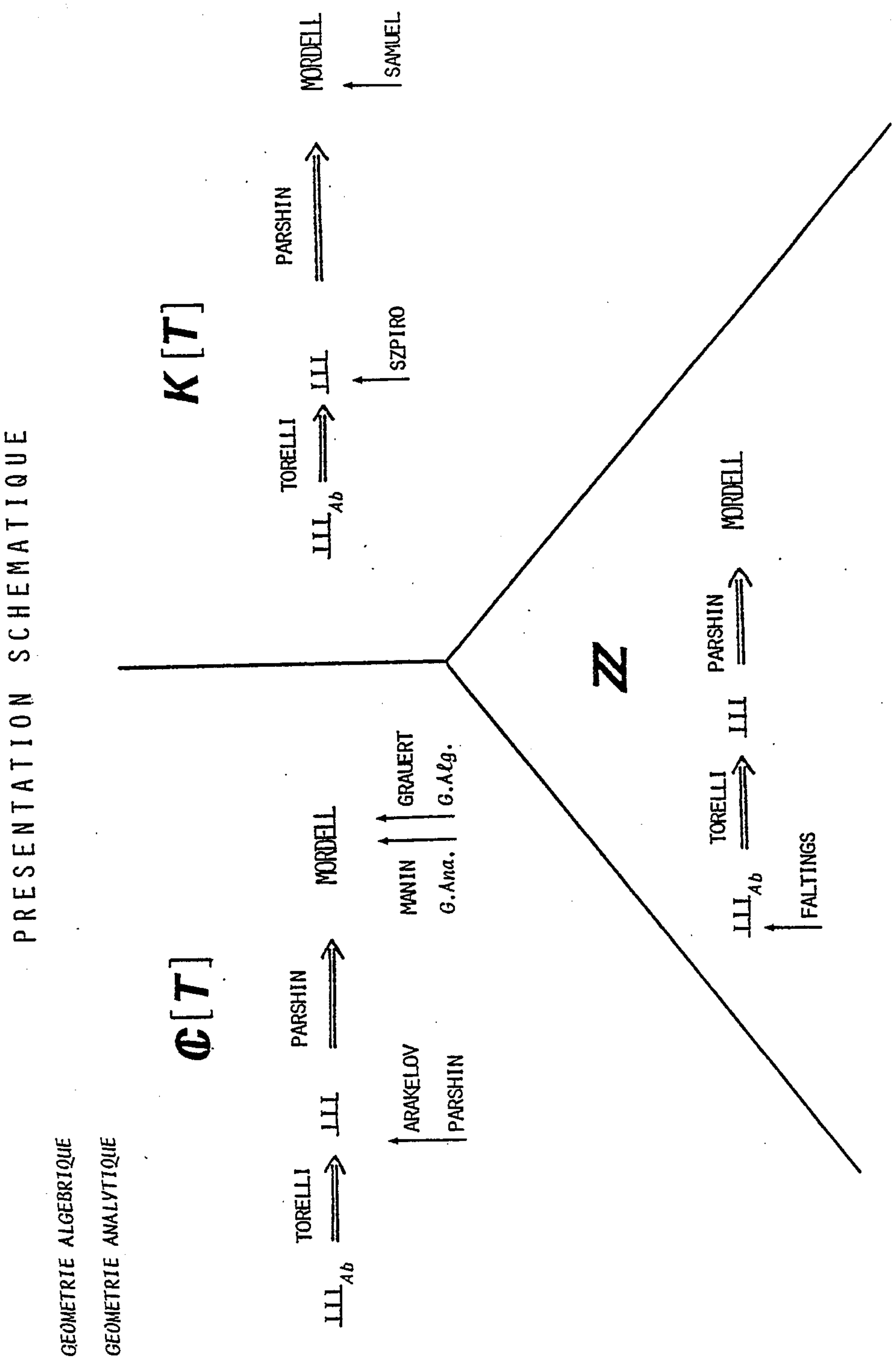
Cet ensemble Ш(S,Δ,g) peut se définir dans les 3 cadres $\mathbb{C}$ [T], K [T] ou $\mathbb{Z}$ à partir de surfaces algébriques respectivement sur $\mathbb{C}$, sur K, ou de schémas arithmétiques, ces derniers étant largement inspirés des surfaces algébriques.

Théorème (Ш)

Conjecturé par Shafarevitch, démontré par Arakelov-Parshin dans le cadre $\mathbb{C}$ [T].

$\forall\, g \geqslant 2$ Ш(S,Δ,g) est fini

Le théorème (Ш), démontré après le théorème (Σ) entraîne le théorème (Σ) par une construction dite de Parshin qui fonctionne dans les 3 cadres, que la base soit $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$ [T] de K [T]. Or le théorème (Σ) démontré par Manin et par Grauert est la conjecture de Mordell pour $\mathbb{C}$ [T]. Samuel a démontré la conjecture de Mordell pour K [T]. La construction de Parshin ne présente d'intérêt que pour la conjecture de Mordell sur $\mathbb{Z}$. Un jalon de plus est posé par Szpiro qui démontre le théorème (Ш) pour K [T].



I.5. *Une limite au changement de cadres* $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}[T]$

Plusieurs difficultés se présentent. Par exemple, les quotients $C[T]/\mathcal{M}$, où $\mathcal{M}$ est un idéal maximal, sont de caractéristique 0 alors que les quotients $\mathbb{Z}/(p)$, où p est premier, sont de caractéristique > 0. Cette difficulté se retrouve, isolée, avec $K[T]$ où K est un corps fini.
Une autre source de difficulté est la suivante :
On sait donner du sens à l'expression "faire varier infinitésimalement un point de $\mathbb{C}$". Pour $\mathbb{C}[T]$, il existe des champs de vecteurs sur $\mathbb{C}$. Dans $\mathbb{Z}$, on sait aussi donner du sens à "faire varier infinitésimalement un point de Spec $\mathbb{Z}$" mais il n'y a pas de champ de vecteurs algébrique sur Spec $\mathbb{Z}$. Cela vient de ce que l'anneau $\mathbb{C}[T]$ est de dimension 1 et qu'il y a un sous-corps, à savoir $\mathbb{C}$, tel que la dimension relative soit 1. L'anneau $\mathbb{Z}$ est aussi de dimension 1, mais il n'a aucun sous-corps, de sorte qu'il n'est pas possible d'avoir une dimension relative. Entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}[T]$ on a le plongement $\iota : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}[T]$ et pour $t \in T$, les applications $\delta_t : \mathbb{C}[T] \to \mathbb{C}$ valeur au point fixé. Dans $\mathbb{Z}$, il y a des analogues aux fonctions δ_t, ce sont les applications de passage au quotient $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(p)$, mais il n'y a pas d'analogue au plongement ι.

I.6. *Réduction de Torelli.*

Une variété abélienne sur $\mathbb{C}$ est une variété algébrique sur $\mathbb{C}$ qui, en tant que variété analytique, est isomorphe à $\mathbb{C}^n/V$ où $V \approx \mathbb{Z}^{2n}$ donc à un tore, (tous les tores n'admettent pas nécessairement de structure algébrique).

Théorème (Jacobi-Albanese)

Si Γ est une courbe algébrique sur $\mathbb{C}$ de genre g, compacte, lisse, alors il existe une variété abélienne A de dimension $g \geqslant 1$ et un plongement $\iota : \Gamma \to A$ universels, c'est à dire que

$\forall$ A' variété abélienne, $\forall f : \Gamma \to A'$

$\exists ! \tilde{f} : A \to A'$ telle que
$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A \arrow[r, "\tilde{f}"'] & A' \end{tikzcd}$$
soit commutatif.

Ce théorème permet d'associer à une surface Σ une variété A_Σ et à une classe

de surfaces (i.e à un élément de Ш) une classe de variétés (i.e un élément d'un nouvel ensemble $Ш_{Ab}$) de la façon suivante :

Soit $\begin{matrix}\Sigma \\ \Pi\downarrow \\ S\end{matrix}$ une surface au dessus de S, soit $\Delta \subset S$ l'ensemble des points de S tels que, en tout point $x \in \Sigma - \overset{-1}{\Pi}(\Delta)$, Σ soit lisse et Π soit une submersion. Alors, pour tout $s \in S - \Delta$, $\Sigma(s)$ fibre en s est une courbe vérifiant les hypothèses du théorème de Jacobi-Albanese. Soit $A_{\Sigma(s)}$ sa variété-Albanese. En regroupant convenablement toutes les $A_{\Sigma(s)}$ obtenues pour $s \in S - \Delta$ et en compactifiant, on construit une variété A_Σ de dimension g+1 sur $\mathbb{C}$, munie d'une projection sur S et telle que les fibres au dessus de S soient, pour $s \in S - \Delta$ les $A_{\Sigma(s)}$, et pour $s \in \Delta$ des variétés dégénérées obtenues par passage à la limite des $A_{\Sigma(s')}$ pour des s' voisins de s.

La construction de A_Σ à partir de Σ n'est pas unique. Mais si $(\Sigma,\Pi) \sim (\Sigma',\Pi')$, alors A_Σ et $A_{\Sigma'}$ sont équivalentes(*). Notons $Ш_{Ab}$ l'ensemble obtenu par passage au quotient. On a une application $Ш \to Ш_{Ab}$. Pour démontrer le théorème (Ш) dans un cadre quelconque, il faudrait démontrer que

1) l'application $Ш \to Ш_{Ab}$ est injective (ou à fibres finies).

2) pour S,Δ,n donnés $Ш_{Ab}(S,\Delta,n)$ est fini.

Malheureusement, 2) est faux. Cependant, on peut remplacer 2) par un résultat 2' plus faible mais qui, avec $Ш \to Ш_{Ab}$ injective, entrainera le théorème (Ш).

L'énoncé 2') va utiliser un lemme (de croissance) qui se démontre convenablement en géométrie analytique complexe. Ce lemme conduit à un énoncé analogue en arithmétique, extrêmement difficile à démontrer. Celui-ci est pourtant un ingrédient essentiel de la démonstration du théorème (Ш) pour $\mathbb{Z}$.

I.7. *Degrés, hauteurs.*

Dans le cas de $\Sigma \subset \mathbb{C}^3$ et $(\xi,\eta) = (\frac{u}{w},\frac{v}{w}) \in \mathcal{S}_{rat}(\Pi) \subset (C(T))^2$,

(*) en un sens analogue à celui donné en I.4

on définit le <u>degré</u> $d(\xi,\eta) = \sup(d(u),d(v),d(w))$.

Pour $X \in \amalg_{Ab}(S,\Delta,n)$, on peut définir un degré $d(X)$ à partir de la notion de degré d'un fibré vectoriel de rang 1 sur S. Cette notion peut-être obtenue de façon algébrique (nombre de zéros - nombre de pôles d'une section) ou de façon topologique (classe d'Euler du fibré).

La notion qui correspond à celle de degré en théorie des nombres est celle de <u>hauteur</u> qui a plusieurs variantes. Pour $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$, on peut poser $h(x,y) = \mathrm{Log}^+|u| + \mathrm{Log}^+|v| + \mathrm{Log}|w|$ où $\frac{u}{w} = x$, $\frac{v}{w} = y$, $u,v \in Z$, $w \in N^\star$ minimal.

En s'inspirant d'une construction de Arakelov, Faltings donne une définition beaucoup plus élaborée de hauteur. Il montre que cette hauteur a des propriétés analogues au degré en géométrie algébrique, du moins assez pour faire passer la démonstration de Grauert, convenablement modifiée, en arithmétique.

1.8. *Conclusion.*

Dans cet exemple, le travail s'est fait en parallèle dans 3 cadres : géométrie diophantienne, géométrie algébrique sur $\mathbb{C}$, géométrie algébrique sur un corps de caractéristique > o. Le problème est posé dans l'un d'eux, la géométrie diophantienne, où il a la particularité de pouvoir se formuler en termes élémentaires. Les concepts utilisés dans la démonstration sont presque tous issus de la géométrie algébrique, (ou de la topologie, via la géométrie $\mathbb{C}$-analytique et la géométrie $\mathbb{C}$-algébrique). Il n'y a pas utilisation dans un cadre de résultats obtenus dans un autre, mais transfert de problèmes (de l'arithmétique vers la géométrie algébrique) et de concepts-outils (de la géométrie algébrique, surtout sur $\mathbb{C}$, vers l'arithmétique). Les démonstrations faites en géométrie algébrique sur $\mathbb{C}$ sont recopiées avec les précautions nécessaires en caractéristiques $p > o$, puis adaptées lorsque c'est possible à la théorie des nombres. Dans les cas les plus simples, les démonstrations peuvent se faire dans les 3 cadres simultanément grâce au langage des schémas (les 3 cadres correspondent à 3 choix du schéma de base au dessus duquel on fait les constructions). Mais cela est impossible dès qu'on entre dans les parties techniques. On est même amené à faire des changements de stratégie.

C'est ainsi qu'en arithmétique, on déduit la conjecture de Mordell de celle de Shafarevitch grâce à la construction de Parshin, tandis qu'en

géométrie algébrique on a obtenu la conjecture de Mordell avant celle de Shafarevitch et, dans ce cas, la construction de Parshin peut sembler seulement une remarque astucieuse.

En fait, le jeu de cadres présenté ici intervient essentiellement de la même façon dans presque toutes les démonstrations d'arithmétique.

II. *Polynômes complexes de degré 2.*

L'étude dynamique des polynômes complexes de degré 2 donne un exemple où on transporte un énoncé d'un cadre initial A à un cadre auxiliaire B. On obtient dans ce nouveau cadre un énoncé équivalent à l'énoncé initial (ou plus fort), qui parait tout à fait non naturel dans le cadre B, mais accessible aux méthodes propres à ce cadre. Il y a donc transfert de problème de A vers B, transfert de résultats de B vers A. Mais il y a aussi transfert de structures dans les deux sens et enrichissement des deux cadres.

En fait, le jeu fait intervenir ici deux ou trois cadres intermédiaires.

1. *Le cadre des polynômes et celui de M.*

On dit qu'un polynôme $f : C \to C$ est hyperbolique si tout point critique est attiré par un cycle attractif ou tend vers ∞. Les polynômes hyperboliques sont relativement bien compris du point de vue dynamique.

Pour tout $d \geqslant 2$, on peut énoncer

Conjecture HGd : Parmi les polynômes de degré d, les polynômes hyperboliques sont denses.

En degré 2, on se ramène par conjugaison affine, aux polynômes de la forme $f_c : z \longmapsto z^2 + c$. Pour tout $c \in \mathbb{C}$, on note K_c l'ensemble des z tels que $f_c^n(z) \not\to \infty$ (ensemble de Julia rempli). On note M l'ensemble des $c \in \mathbb{C}$ tels que K_c soit connexe.

D'après Fatou et Julia, M est aussi l'ensemble des c tels que $0 \in K_c$. Il est facile de voir que M est compact. Par ailleurs, A.Douady et H.Hubbard ont montré [AD-HH1] que M est connexe. Notons M' l'ensemble des c tels que f_c admette un cycle attractif (pour un tel c, le point 0 est attiré par le cycle attractif). L'ensemble M' est un ouvert de $\mathbb{C}$, contenu dans M, donc dans $\mathring{M}$.

La conjecture (HG2) peut se formuler ainsi : $M' = \mathring{M}$. Cette formulation trivialement équivalente à la précédente, se situe dans le cadre de l'étude topologique de M dans $\mathbb{C}$, tandis que la précédente se situe dans le cadre des polynômes.

On ne sait pas démontrer la conjecture (HG2), mais on sait la ramener à la suivante (MLC) : M est localement connexe.

[AD-HH 1] A. Douady et J.H. Hubbard, Itération des polynômes quadratiques complexes. CRAS Janvier 1982.

Ceci se fait en se ramenant à une étude combinatoire de M, ou du moins de certains points de M, puis en se transportant dans un cadre purement combinatoire construit ad hoc.

La partie combinatoire, conçue grâce à des images reposant sur (MLC) peut se faire sans cette hypothèse. On peut, sans l'hypothèse (MLC), en tirer certaines conclusions topologiques, mais pas assez pour exclure l'existence d'une "composante farfelue" de M', i.e pour démontrer HG 2.

2. *Nervures.*

Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact connexe plein, localement connexe. Une méthode pour étudier K consiste à déterminer les Nervures de K. Notons $t \longmapsto \gamma(t)$ le lacet de Carathéodory $\mathbb{T} \to \partial K$ (obtenu en prolongeant la représentation conforme $\mathbb{C}-\overline{D}_r \to \mathbb{C}-K$ tangente à 1 en ∞). Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit H_k en joignant entre eux les points de la forme $\gamma(\frac{p}{2^k})$ par des arcs dans K.

Précisions : a) K connexe, localement connexe $\Rightarrow$ K connexe par arc $\Rightarrow \forall x,y \in K, x \neq y$ $\exists\, \eta$ arc (chemin injectif de x à y).

b) Pour fixer le choix d'un tel chemin, on impose un règlement : pour toute composante connexe U de $\mathring{K}$, on choisit un point $a \in U$ ("centre") grâce auquel on définit un arc réglementaire [AD-HH2].

L'arbre H_{k+1} prolonge H_k ainsi :

$$H_{k+1} = H_k \cup \bigcup_{\substack{\tau = \frac{p}{2^{k+1}} \\ p \text{ impair}}} N(\tau)$$

où $N(\tau)$ est l'arc de $\alpha(\tau)$, "origine" de $N(\tau)$ dans H_k, à $\gamma(\tau)$ avec $N(\tau) \cap H_k = \{\alpha(\tau)\}$.

Proposition 1. Tout centre d'une composante connexe de K est l'origine d'une infinité de nervures.

3. *Etude combinatoire.*

Les points de M qui sont susceptibles d'une étude combinatoire sont les points c tels que 0 soit prépériodique pour f_c. On note $\mathcal{D}_o$ = {c| 0 périodique pour f_c}, (il y a un tel point pour chaque composante connexe hyperbolique ; on le choisit comme centre). On note $\mathcal{D}_2$ = {c| 0 strictement prépériodique pour f_c}, ce sont les points de Misurewicz. (Pour de tels points, $\overset{\circ}{K} = \emptyset$ et 0 tombe sur un cycle répulsif). On a $\mathcal{D}_2 \subset \partial M$.

A un polynôme f_c , $c \in \mathcal{D}_o \cup \mathcal{D}_2$, on associe un arbre topologique fini $H_c \subset K_c$, en joignant entre eux les $x_n = f_c^n(o)$ par des arcs dans K_c (réglementaires si $c \in \mathcal{D}_o$). L'arbre H_c (muni des x_n et de l'ordre cyclique des branches aux points de branchement) est un objet combinatoire qui concentre de manière utilisable toute l'information combinatoire qu'on peut tirer de f_c. Au vu de cet arbre, on peut déterminer les arguments externes de c si $c \in \mathcal{D}_2$ et si $c \in \mathcal{D}_o$ est le centre d'une composante W, on détermine de même les arguments externes des points de ∂W d'argument interne rationnel (ce sont les arguments associés à c).

Remarque. Ceci ne suppose pas (MLC), bien que la notion générale d'arguments externes d'un point de K ne soit bien définie que pour K localement connexe.

4. *Traduction combinatoire du problème.*

Sous l'hypothèse (MLC), on peut démontrer le

Théorème 1. L'origine de toute nervure de M est un point $\mathcal{D}_o \cup \mathcal{D}_2$.

Vu la proposition 1, ceci entraine (HG2). En effet, s'il y avait une composante farfelue, son centre serait l'origine d'une infinité de nervures sans appartenir à $\mathcal{D}_o \cup \mathcal{D}_2$.

Le théorème 1 se trouve, lui, dans le cadre de l'étude géométrique de M. Mais pour le démontrer, on donne une description combinatoire des nervures.

Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact connexe plein localement connexe, muni d'un centre pour chaque composante connexe de $\overset{\circ}{K}$.

Définition des Arguments associés à x.

Si $x \in \partial K$, ce sont les arguments externes de x.

Si x est le centre d'une composante connexe W de $\overset{\circ}{K}$, ce sont les arguments externes des points de ∂W.

Définition : On note $\theta_-(x)$ (resp. $\theta_+(x)$) la borne inférieure (resp. supérieure) des arguments associés à x.

Définition : Le chef lieu d'un intervalle $I \subset \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est le $\frac{p}{2^k} \in I$ avec k minimum.

Proposition. (Description combinatoire des nervures).

Soit $x \in \partial K$ ou x centre d'une composante connexe de $\overset{\circ}{K}$,

a) $x \in N(K,\tau) \Leftrightarrow (\exists\ \theta',\theta''$ associés à x), τ chef-lieu de $[\theta',\theta'']$.

b) $x \in N^*(K,\tau) = N(K,\tau) - \{\alpha(\tau)\} \Leftrightarrow \tau$ chef-lieu de $[\theta_-(x),\theta_+(x)]$

Le théorème se ramène donc à

Théorème 1bis.

$\forall\ \tau = \frac{p}{2^k}$, $\exists \alpha \in \mathcal{D}_o \cup \mathcal{D}_2$, $\exists\ \theta',\theta''$ associés à α tels que

τ chef-lieu de $[\theta',\theta'']$

τ n'est pas chef-lieu de $[\theta_-(\alpha),\ \theta_+(\alpha)]$

Remarques. 1) Le théorème 1bis se situe encore dans le cadre de l'étude géométrique de M, mais avec des outils combinatoires ou numériques (en fait, dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$).

2) Pour $c \in \mathcal{D}_o$, on a deux définitions d'arguments associés : une combinatoire en ne prenant que les points de ∂W d'arguments internes rationnels et une topologique en les prenant tous. On démontre le théorème 1bis avec les arguments combinatoires, ce qui est plus fort.

3) On a un énoncé qui ne suppose pas (MLC) et qu'on peut démontrer sans cette hypothèse.

5. *Cadre des arbres.*

Définition. Un arbre de Hubbard abstrait est un arbre fini H muni

. d'une classe d'isotopie de plongements dans $\mathbb{R}^2$ (ou, ce qui équivaut, d'un ordre cyclique sur les branches aux points de branchement).

. d'une suite prépériodique de points $(x_n)_{n\in N}$.

tel que

a) toute extrémité soit un point marqué

b) x_o a au plus 2 brins, d'où $H = H_- \cup H_+$ avec $H_- \cap H_+ = \{x_o\}$

c) $\exists F : H \to H$ continue , $F(x_i) = x_{i+1}$, $F_{|H_-}$ et $F_{|H_+}$ injectives.

Si $c \in \mathfrak{D}_o \cup \mathfrak{D}_2$, l'arbre H_c a un arbre abstrait sous-jacent. L'algorithme qui permet de déterminer les arguments associés à c à partir de H_c ne fait intervenir que l'arbre abstrait associé à H_c, de sorte que l'on peut définir les arguments associés à un arbre abstrait.

La définition d'un tel arbre s'exprime de façon purement combinatoire. Pourtant, dans le seul cadre combinatoire, et sans autre guide, elle décrit un objet parmi des "tas" d'autres possibles et de ce fait peut paraître arbitraire. Elle permet cependant de traduire le théorème 1bis, ou plutôt de le décomposer en deux étapes :

Théorème 1ter.

Soit $\tau = \frac{p}{2^k}$. Il existe alors un arbre de Hubbard abstrait H et deux arguments θ' et θ'' associés à H tels que τ soit le chef-lieu de $[\theta',\theta'']$, sans être le chef-lieu de $[\theta_-(H), \theta_+(H)]$.

Théorème de "réduction" : Soit H un arbre de Hubbard abstrait. Il existe alors $c \in \mathfrak{D}_o \cup \mathfrak{D}_2$ tel que tout argument associé à H soit aussi associé à H_c.

L'énoncé du théorème 1ter appartient entièrement au cadre combinatoire. La démonstration utilise le lemme suivant.

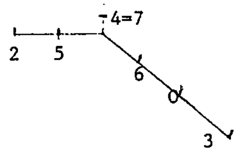
Lemme : Il existe un arbre H_τ ayant τ comme seul argument associé.

La démonstration du théorème 1ter à partir de ce lemme est une construction combinatoire (d'ailleurs pas très difficile) dans le cas des arbres abstraits.

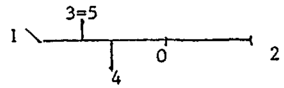
La démonstration du lemme peut se faire purement dans le cadre combinatoire. On peut aussi utiliser un "théorème d'aboutissement" qui assure que le rayon externe $\mathcal{R}(M,\tau)$ aboutit en un point $\gamma(\tau) \in \mathfrak{D}_2$, poser $H_\tau = H_{\gamma(\tau)}$ et vérifier qu'il a les propriétés voulues.

Le théorème de réduction est celui qui permet de revenir du cadre combinatoire aux points de $\mathfrak{D}_o \cup \mathfrak{D}_2 \subset M$. Bien sûr, on aurait préféré un théorème qui dirait que tout arbre de Hubbard abstrait est isomorphe à un H_c avec $c \in \mathfrak{D}_o \cup \mathfrak{D}_2$. Mais c'est faux, voici deux contre-exemples :

-1.

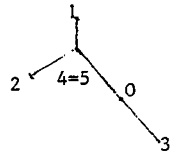


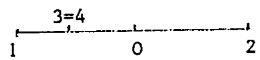
A.Douady



Tan-Lei

Voici les arbres réduits correspondants.





Cependant, la déviation à partir de cet énoncé est dans le bon sens, de sorte qu'on peut grâce à ce théorème de réduction déduire le théorème 1bis du théorème 1ter et par suite le théorème 1, donc l'implication (MLC) $\Rightarrow$ (HG2).

En conclusion, nous pouvons dire que dans ce problème, 3 cadres ont interagi

- le cadre géométrique : M, avec $\mathfrak{D}_o \cup \mathfrak{D}_2$

- le cadre des arguments : $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ avec $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ comme réunion de l'ensemble des rationnels à dénominateurs pairs et de celui des rationnels à dénominateurs impairs.

- le cadre des arbres de Hubbard abstraits intervenant comme cadre auxiliaire de travail.

Les correspondances entre ces 3 cadres sont imparfaites, mais suffisamment bonnes pour que le jeu de cadres soit fructueux.

En outre, chacun hérite, via ces correspondances de structures naturelles dans un autre. En particulier, on obtient une relation d'équivalence sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, qui est très mystérieuse dans le cadre arithmétique :
$t \sim u$ si t et u sont les arguments externes d'un même point de M.
Dans le but de la comprendre, Thurston est en train d'inventer un cadre - Laminations du dique - intermédiaire entre le cadre des arguments et celui des arbres.

B I B L I O G R A P H I E

[Ar] Artigue M. : Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques. Thèse d'état Université Paris VII 1984

Bachelard G. : La formation de l'esprit scientifique Vrin 1983

[Bal.] Balacheff N. : Preuve et démonstration RDM 1982 Vol 3.3.

[Br 1] Brousseau G. : - Ingénierie didactique 2ème Ecole d'été de didactique des maths 1982
- Petit panorama de la didactique des maths 2ème Ecole d'été de didactique des maths 1982
- Problèmes de l'enseignement des décimaux RDM 1980 Vol 1.1 et 1981 Vol. 2.1

[Ch] Chevallard Y. : - Pourquoi la transposition didactique Séminaire de didactique des maths. Grenoble 1981-82.
- Pour la didactique 2ème Ecole d'été de didactique des maths 1982
- Sur le contrat didactique Notes polycopiées I.R.E.M Marseille

Chevallard Y et Joshua M.A : Un exemple d'analyse de la transposition didactique. RDM 1982 Vol. 3.2

Doise W, Mugny G. : Le développement social de l'intelligence Inter Editions 1981

[Dou] Douady R. : - Une expérience à Montrouge Educational Studies in Mathematics 7 (1976) 49-58
- Approche des nombres réels ... RDM 1980 Vol 1.1

[Dou-Per] Douady R, Perrin M.J : - Utilisation des décimaux dans des problèmes d'approximation. Actes du 5e colloque PME 1981
- Mesure des longueurs et des aires Brochure n° 48 - I.R.E.M Paris Sud 1983
- Nombres décimaux Brochure I.R.E.M à paraître

[ESE] : Sciences en 6è et 5è. L'expérience ESE
CEDIC 1976

[Gl] Glaeser G. : Livre du problème 1
Cedic

Guilbaud : Mathématiques et à peu près
C I E M Karlsruhe 1976

Laborde C. : Langue naturelle et écriture symbolique
Thèse d'état Université de Grenoble 1982

[Leb] Lebesgue H. : La mesure des grandeurs
A. Blanchard 1975

Perret-Clermont A.N : La construction de l'intelligence dans
l'interaction sociale (1979)
P. Lang.

[Pia] Piaget J. : L'équilibration des structures cognitives
PUF 1975

Pluvinage F. : Difficultés des exercices scolaire en
mathématiques.
Thèse d'état. Université de Strasbourg 1977

Ratsimba-Rayohn H : Deux méthodes de mesures rationnelles
RDM 1982 Vol 3.1

[Rog] Rogalski J. : - Sur les représentations graphiques
Exposé non publié
2ème Ecole d'été de didactique des maths

- Quelques éléments de théorie piagétienne
et didactique des mathématiques
Cahier de didactique n°1 I.R.E.M Paris-Sud

[Ver] Vergnaud G. : - Quelques orientations ... des recherches
françaises en mathématiques
RDM 1981 Vol 2.2.

- L'enfant, la mathématique et la réalité
P. Lang Berne 1981.